ISSN 0853 - 8115

# FORUM SATISTIKA DAN KOMPUTASI

Vol. 2 No. 1 Maret 1997



**Jurusan Statistika**
**Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**
**Institut Pertanian Bogor**
**Bogor, Indonesia**

Forum Statistika dan Komputasi, Maret 1997, p:10-14
ISSN 0853-8115

Vol. 2, No. 1

# UJI NONPARAMETRIK PERLAKUAN ACAK DALAM RANCANGAN ACAK KELOMPOK LENGKAP

**Sigit Nugroho** [1)]

## ABSTRACT

*The parametric approach sometimes causes problems, such as: the normality of the random errors is not always true, and the normality of $Y_j$'s can be more questionable since these variables are not directly observed. Friedman and Anderson developed statistics for testing no fixed treatment effects in two-way experiments nonparametrically. A procedure for testing the random treatment effects nonparametrically is developed here.*

## PENDAHULUAN

Salah satu tahapan dalam penelitian adalah analisis data dari obyek yang dipelajari. Pengolahan data dengan metode yang tepat perlu dimiliki oleh seorang peneliti, karena penggunaan statistik yang kurang tepat akan menyebabkan terjadinya bias dan/atau penarikan kesimpulan yang kurang baik atau kurang benar.

Penyimpangan terhadap asumsi dari statistik yang dipakai merupakan kesalahan umum yang banyak dijumpai. Asumsi kenormalan dan kehomogenan ragam dapat menjadikan hal yang serius dalam analisis keragaman. Bila data menyebar normal, maka uji parametrik digunakan; sedangkan apabila kenormalan dari data diragukan sebaiknya digunakan uji-uji nonparametrik.

Friedman (1937) menurunkan sebuah statistik untuk menguji hipotesis tak ada perbedaan antar c perlakuan dalam model pengaruh tetap dua arah dengan menggunakan peringkat. Sebuah statistik uji nonparametrik juga telah diusulkan oleh Anderson (1959) untuk hipotesis serupa; sedangkan statistik uji parametrik adalah F (Fisher) untuk pengujian tak ada pengaruh perlakuan dalam analisis dua arah. Sebagai catatan bahwa statistik Friedman dan Anderson digunakan untuk pengujian pengaruh tetap (*fixed effects*).

Dalam tulisan ini akan dipelajari statistik nonparametrik untuk pengujian pengaruh acak dalam analisis dua arah dengan satu pengamatan per sel atau juga dikenal dengan Rancangan Acak Kelompok Lengkap.

## TINJAUAN PUSTAKA

Misalkan model percobaan dua arah dapat dituliskan sebagai berikut:

$$X_{ij} = \mu + \beta_i + Y_j + \varepsilon_{ij}$$

untuk i=1,2,...,b dan j=1,2,...,c

dengan $Y_j$ dan $\varepsilon_{ij}$ peubah acak-peubah acak yang saling bebas (*mutually exclusive*). $Y_j$ melambangkan pengaruh perlakuan ke-j, dan $\beta_i$ adalah pengaruh blok ke-i dan

[1)] *Staf Pengajar Fakultas Pertanian Universitas Bengkulu*

bersifat tetap. Sebagai hipotesis nol adalah bahwa perlakuan $Y_j$ menghasilkan sesuatu yang seragam, atau dengan lain perkataan bahwa keragaman-nya nol.

Bila dalam analisis dua arah asumsi kenormalan dan kehomogenan ragam sudah terpenuhi, maka statistik uji F (Fisher) digunakan baik dalam hal perlakuan bersifat tetap ataupun acak (blok bersifat tetap) yaitu:

$$F = \frac{JK(Perlakuan)/db(Perlakuan)}{JK(Galat)/db(Galat)}$$

(Federer, 1955). dimana

$$JK(Perlakuan) = b\sum_{j=1}^{c}\left(\overline{X}_{.j} - \overline{X}_{..}\right)^2$$

dan

$$JK(Galat) = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{c}\left(X_{ij} - \overline{X}_{i.} - \overline{X}_{.j} + \overline{X}_{..}\right)^2$$

sedangkan besarnya db(Perlakuan) = c-1 dan db(Galat) = (b-1)(c-1)

Friedman (1937) menurunkan sebuah statistik untuk menguji hipotesis tak ada perbedaan antar c perlakuan dalam model pengaruh tetap dua arah dengan menggunakan peringkat, yang dirumuskan sebagai berikut:

$$F_R = \frac{12}{bc(c+1)}\sum_{j=1}^{c}\left[\sum_{i=1}^{b}\left(R_{ij} - \frac{c+1}{2}\right)\right]^2$$

b adalah jumlah blok, c adalah jumlah perlakuan dan $R_{ij}$ adalah urutan pengamatan dalam blok ke-i dan perlakuan ke-j. Urutan pengamatan dilakukan dalam tiap blok dari nilai terkecil (angka 1) hingga terbesar (angka c).

Anderson (1959) mengusulkan statistik uji untuk analisis hal yang sama. Misalkan $D_{kj}$ adalah banyaknya blok sedemikian sehingga perlakuan j menerima urutan ke-k, maka statistik uji Anderson dapat dituliskan sebagai berikut:

$$A = \frac{c}{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{j=1}^{c}\left(D_{kj} - \frac{b}{c}\right)^2$$

b adalah jumlah blok dan c adalah jumlah perlakuan. Statistik uji Friedman dan Anderson digunakan untuk menguji pengaruh perlakuan yang bersifat tetap.

## STATISTIK UJI UNTUK PERLAKUAN ACAK SECARA NONPARAMETRIK

Pada bagian ini akan disampaikan statistik uji untuk perlakuan acak secara nonparametrik dari percobaan dua arah dengan satu pengamatan per sel. Karena dalam hal pengujian ini kita tidak mungkin mendapatkan uji paling kuasa seragam, di sini digunakan pendekatan uji paling kuasa lokal.

Sebelumnya akan diberikan dahulu keterangan akan notasi yang digunakan dalam rumus yang dipakai. Perlakuan dialokasikan secara acak untuk seluruh satuan percobaan dalam tiap blok. Banyaknya pengamatan dalam tiap blok adalah c. Misalkan $W_1^{(i)} < W_2^{(i)} < \ldots < W_c^{(i)}$ merupakan contoh tertata dari peubah $X_{ij}$, j=1,2,...,c untuk blok ke-i. Misalkan juga tataan peringkat dari contoh berukuran c untuk blok ke-i adalah sebagai berikut:

$$\underline{Z}^{(i)} = \left(Z_1^{(i)}, Z_2^{(i)}, \ldots, Z_c^{(i)}\right)$$

dengan $Z_k^{(i)} = j$ jika $W_k^{(i)} = X_{ij}$. Dengan demikian untuk tiap blok akan terdapat c! kemungkinan tataan peringkat. Untuk keseluruhan pengamatan kita dapat menuliskan $\underline{Z} = \left(\underline{Z}^{(1)}, \underline{Z}^{(2)}, \ldots, \underline{Z}^{(b)}\right)$, dan $\underline{z}$ melambangkan sembarang realisasi dari $(c!)^b$ kemungkinan tataan peringkat.

Hipotesis yang akan diuji adalah $H_o$: G(y)=0 untuk y<0 atau 1 untuk y≥0 lawan $H_1$: G(y) merupakan salah satu anggota dari kelas fungsi sebaran *nontrivial*. Misalkan $G^*(y) = G(y/\Delta)$ merupakan kelas fungsi sebaran nontrivial dengan $\Delta$ adalah sembarang bilangan positif dan kecil. Dengan demikian pernyataan bahwa sebaran dikatakan menciut *(degenerate)* pada titik 0 setara dengan pernyataan kelas ini dengan $\Delta=0$. Oleh karena itu kita dapat menuliskan kembali $H_o$: $\Delta=0$ lawan $H_1$: $\Delta>0$.

**Dalil**

Untuk percobaan dua arah dengan satu pengamatan per sel, uji paling kuasa lokal untuk pengujian $H_o$ lawan $H_1$ adalah: Tolak $H_o$ bila $\Psi \geq K_\alpha$ dengan

$$\Psi = \sum_{i=1}^{b}\sum_{j=1}^{c}\sum_{m=1}^{c} E_0\left[\frac{f''(W_m^{(i)})}{f(W_m^{(i)})}\right]\delta_{jZ_m^{(i)}}$$

$$+\sum_{j=1}^{c}\sum_{i\neq k}^{b}\left[\sum_{m=1}^{c} E_0\left[\frac{f'(W_m^{(i)})}{f(W_m^{(i)})}\right]\delta_{jZ_m^{(i)}}\right]$$

$$\left[\left[\sum_{t=1}^{c} E_0\left[\frac{f'(W_t^{(k)})}{f(W_t^{(k)})}\right]\delta_{jZ_t^{(k)}}\right]\right]$$

$K_\alpha$ ditentukan dengan taraf nyata $\alpha$ dan $\delta_{ij} = 1$ jika i=j dan 0 selainnya, asalkan kondisi berikut dipenuhi:

i. fungsi kepekatan peluang f memiliki turunan yang kontinu mutlak *(absolutely continuous)* pada selang terbatas,
ii. $f'(x)$ kontinu hampir di manapun *(almost everywhere)*,
iii. $\int y \, dG(y) = 0$
iv. $\int y^2 \, dG(y) = \sigma^2 < \infty$
v. $E\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln f(X)\right| < \infty$

*Bukti:*

Konsep uji paling kuasa lokal dapat dituliskan kembali sebagai berikut

$$\lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{P(\underline{Z}=\underline{z}|H_\Delta) - P(\underline{Z}=\underline{z}|H_o)}{\Delta^2}\right\}$$

Untuk selanjutnya peluang di atas dinyatakan dalam bentuk bersyarat pada nilai Y, kemudian gunakan fakta bahwa blok adalah saling bebas dan gunakan ekspansi Taylor. Kemudian dievaluasi tahap demi tahap, dan akhirnya dengan menggunakan asumsi yang ada serta menghilangkan konstanta yang tidak perlu kita dapatkan dalil tersebut.

## STATISTIK UJI UNTUK SKOR LOGISTIK

Sebagai bentuk khusus dari statistik uji yang telah dibahas pada bagian sebelumnya, akan disampaikan pada bagian ini statistik uji untuk skor logistik, dengan perkataan lain bila fungsi kepekatan peluang f adalah fungsi kepekatan logistik baku. Lemma dan dalil-dalil berikut berhubungan dengan skor logistik dan disampaikan tanpa pembuktian.

**Lemma.**

Statistik untuk pengujian $H_o$ lawan $H_\Delta$ dalam kasus sebaran logistik adalah

$$\Psi_L = \frac{4}{(c+1)^2}\sum_{j=1}^{c}\left[\sum_{i=1}^{b} R_{ij}\right]^2 - b^2c - \frac{bc(c-1)}{3(c+1)}$$

Nilai kritis untuk statistik ini dapat dilihat pada Tabel 1 untuk beberapa nilai b dan c.

**Tabel 1. Nilai Kritis Statistik Uji $\psi_L$ .**

| c | b | x | $P(\Psi_L > x)$ |
|---|---|---|---|
| 3 | 4 | 2.50 | 0.069 |
| | | 4.00 | 0.042 |
| | 5 | 4.00 | 0.039 |
| | | 7.00 | 0.008 |
| | 6 | 5.00 | 0.052 |
| | | 7.50 | 0.012 |
| | 7 | 6.00 | 0.051 |
| | | 10.00 | 0.016 |
| | 8 | 6.50 | 0.047 |
| | | 11.50 | 0.010 |
| | 9 | 9.00 | 0.048 |
| | | 14.00 | 0.010 |
| 4 | 2 | 0.96 | 0.167 |
| | | 1.28 | 0.042 |
| | 3 | 2.88 | 0.054 |
| | | 3.52 | 0.017 |
| | 4 | 4.48 | 0.052 |
| | | 6.08 | 0.012 |
| | 5 | 5.44 | 0.055 |
| | | 8.96 | 0.009 |
| | 6 | 6.72 | 0.056 |
| | | 10.88 | 0.010 |
| | 7 | 8.00 | 0.052 |
| | | 13.12 | 0.010 |
| | 8 | 9.28 | 0.051 |
| | | 15.04 | 0.010 |
| 5 | 3 | 3.56 | 0.045 |
| | | 4.89 | 0.008 |
| | 4 | 5.11 | 0.049 |
| | | 7.56 | 0.010 |
| | 5 | 6.67 | 0.049 |
| | | 10.23 | 0.010 |

**Dalil**

$\Psi_L$ dan $F_R$ berhubungan secara linier, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\Psi_L = \frac{bc}{3(c+1)} F_R - \frac{bc(c-1)}{3(c+1)}$$

**Dalil**

Karena $\psi_L$ dapat dinyatakan sebagai kombinasi linier dari $F_R$ maka $\psi_L$ memiliki sifat-sifat asimtotik yang sama dengan $F_R$ , bila hipotesis nol benar.

**Dalil**

Kriteria uji Friedman juga merupakan uji paling kuasa lokal untuk $H_o$ lawan $H_1$ bila f adalah fungsi kepekatan logistik.

## KEPUSTAKAAN

Anderson, R. L. 1959. Use of contingency tables in the analysis of consumer preference studies. *Biometrics* **15**, 582-590.

Federer, W. T. 1955. *Experimental Design*. Theory and Application. The Macmillan Company. New York.

Friedman, M. 1937. The use of ranks to avoid the assumption of normality implicit in the analysis of variance. *J. of Amer. Statist. Assoc.* **32**, 675-701.

Govindarajulu, Z. and J.V. Deshpande. 1972. Random effects model: Nonparametric case. *Ann. Inst. Statist. Math.* **24**, 165-170.

Hajek, J and Z. Sidak. 1967. *Theory of Peringkat Tests.* Academic Press. New York.

Nugroho, S. 1994. *On the locally most powerful peringkat test of the two-way experiment.* A doctoral dissertation submitted to the University of Kentucky. Lexington, Kentucky. U.S.A.

Randles, R.H. and D.A. Wolfe. 1979. *Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics.* John Wiley and Sons. New York.

⊗