Pengujian Hipotesis Statistika
(7 sesi)

Disusun oleh

Sigit Nugroho

Universitas Bengkulu

Hipotesis

- **Hipotesis** merupakan dugaan sementara yang dianggap benar.
- Dalam Statistika, **Hipotesis** merupakan pernyataan yang bisa diuji kebenarannya dan dapat menjadi jawaban terhadap suatu masalah.
- **Hipotesis Statistik** dapat berkenaan dengan rata-rata, ragam, proporsi, perbedaan dua rataan, perbandingan dua ragam, perbedaan dua proporsi, atau bentuk fungsi kepekatan peluang.

Hipotesis Statistik

- **Hipotesis nol** digunakan untuk menyatakan kondisi parameter yang akan diuji. Pada umumnya menggunakan notasi =, yang mengindikasikan kondisi yang sama atau tidak berubah.
- **Hipotesis satu** atau **hipotesis alternatif** atau **hipotesis tandingan** secara umum menyatakan bahwa hipotesis nol tidak benar. Umumnya menyatakan hipotesis yang ingin dibuktikan kebenarannya.
  - Hipotesis dikatakan **sederhana** apabila hanya mencakup nilai tunggal, atau **majemuk** apabila tidak diberikan nilai tertentu atau dapat memiliki lebih dari satu nilai.

Prinsip Pengujian Hipotesis

- **Keputusan** : Tolak hipotesis nol jika bukti-bukti mendukung hipotesis tandingan, atau dukung hipotesis nol jika tidak terdapat cukup bukti untuk mendukung hipotesis tandingan

Tipe Kesalahan

	Kenyataan Hipotesis Nol	
Keputusan	**Benar**	**Salah**
Tolak Hipotesis Nol	Kesalahan Tipe I	Keputusan Benar
Terima Hipotesis Nol	Keputusan Benar	Kesalahan Tipe II

Kesalahan Tipe I sering dinotasikan dgn α

Kesalahan Tipe II sering dinotasikan dgn β

Langkah Pengujian Hipotesis

- Merumuskan hipotesis yang akan diuji : H_0 dan H_a
- Memilih taraf nyata pengujian
- Menentukan Kriteria Penolakan Hipotesis
  - Perhatikan hal-hal berikut:
    - Tanda/Operator pada hipotesis alternatif/tandingan (**<, ≠, >**) yang akan menentukan dimana daerah penolakan hipotesis nol berada.
    - Taraf nyata pengujian (**α**) yang akan menentukan besarnya luas daerah penolakan
    - Statistik uji yang digunakan (**Z, χ^2, t,** atau **F**)
- Melakukan perhitungan-perhitungan statistik
  - Menghitung statistik-statistik contoh (*ukuran contoh*, *rata-rata contoh*, dan *simpangan baku contoh*)
  - Menghitung nilai statistik pengujian
- Menarik Kesimpulan

Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 diketahui

Tipe Pengujian

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{\sigma}$$

Statistik Uji

Hipotesis	Daerah Penolakan
$H_0{:}\mu=\mu_0$ vs $H_1{:}\ \mu<\mu_0$	$z<z_\alpha$
$H_0{:}\mu=\mu_0$ vs $H_1{:}\ \mu\neq\mu_0$	$z<z_{\alpha/2}$ atau $z>z_{1-\alpha/2}$
$H_0{:}\mu=\mu_0$ vs $H_1{:}\ \mu>\mu_0$	$z>z_{1-\alpha}$

Kriteria Penolakan

Teladan Pengujian Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 diketahui

Sebuah perusahaan alat olahraga mengembangkan jenis batang pancing sintetik, yang dikatakan memiliki kekuatan dengan rata-rata 8 kilogram dan simpangan baku 0,5 kilogram. Ujilah hipotesis bahwa rata-rata kekuatan batang pancingnya 8 kilogram lawan tidak sama dengan 8 kilogram bila suatu contoh acak berukuran 50 batang pancing itu setelah di tes memberikan rata-rata kekuatan 7,8 kilogram. Gunakan taraf nyata pengujian 1%.

Teladan Pengujian Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 diketahui

H_0: $\mu = 8$ vs H_1: $\mu \neq 8$

$\alpha = 0{,}01$

Tolak H_0, jika $z_{hit} < z_{0,005} = -2{,}575$ atau $z_{hit} > z_{0,995} = 2{,}575$

n = 50   xbar = 7,8 dan $\sigma = 0{,}5$

$$z_{hit} = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{(7{,}8-8)\sqrt{50}}{0{,}5} = -2{,}828$$

Karena $z_{hit} = -2{,}828 < -2{,}575$ maka hipotesis nol ditolak. Artinya : Terdapat cukup bukti dengan taraf nyata pengujian 1%, bahwa rata-rata kekuatan batang pancing tersebut kurang dari 8 kg

Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 tak diketahui dan ukuran contoh besar (n>30)

Tipe Pengujian

$$z = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s}$$

Statistik Uji

Hipotesis	Daerah Penolakan
$H_0:\mu=\mu_0$ vs $H_1: \mu<\mu_0$	$z<z_\alpha$
$H_0:\mu=\mu_0$ vs $H_1: \mu\neq\mu_0$	$z<z_{\alpha/2}$ atau $z>z_{1-\alpha/2}$
$H_0:\mu=\mu_0$ vs $H_1: \mu>\mu_0$	$z>z_{1-\alpha}$

Kriteria Penolakan

Teladan Pengujian Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 tak diketahui dan ukuran contoh besar (n>30)

Suatu contoh acak 100 catatan kematian di Amerika Serikat selama tahun lalu menunjukkan umur rata-rata 71,8 tahun, dengan simpangan baku 8,9 tahun. Apakah ini menunjukkan bahwa harapan umur sekarang ini lebih dari 70 tahun ? Gunakan taraf nyata pengujian 5%. Bagaimana bila taraf nyata pengujian 1% ?

Teladan Pengujian Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 tak diketahui

H_0: μ = 70 vs H_1: μ > 70

α = 0,05

Tolak H_0, jika $z_{hit} > z_{0,95}$ =1,645

n = 100   xbar = 71,8 dan s = 8,9

$$z_{hit} = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s} = \frac{(71,8 - 70)\sqrt{100}}{8,9} = 2,022$$

Karena z_{hit} = 2,022 > 1,645 maka hipotesis nol ditolak. Artinya : Terdapat cukup bukti dengan taraf nyata pengujian 5%, bahwa rata-rata umur (harapan hidup) saat ini lebih dari 70 tahun

Teladan Pengujian Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 tak diketahui

H_0: μ = 70 vs H_1: μ > 70

α = 0,01

Tolak H_0, jika $z_{hit} > z_{0,99}$ =2,326

n = 100   xbar = 71,8 dan s = 8,9

$$z_{hit} = \frac{(\bar{x}-\mu)\sqrt{n}}{s} = \frac{(71{,}8-70)\sqrt{100}}{8{,}9} = 2{,}022$$

Karena z_{hit} = 2,022 < 1,645 maka hipotesis nol **diterima**. Artinya : Belum terdapat cukup bukti dengan taraf nyata pengujian 1%, bahwa rata-rata umur (harapan hidup) saat ini lebih dari 70 tahun

Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 tak diketahui dan ukuran contoh kecil ($n \leq 30$)

Tipe Pengujian

$$t = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s}$$

Statistik Uji

Hipotesis	**Daerah Penolakan**
$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu < \mu_0$	$t < -t_{\alpha;n-1}$
$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu \neq \mu_0$	$t < -t_{\alpha/2;n-1}$ atau $t > t_{\alpha/2;n-1}$
$H_0: \mu = \mu_0$ vs $H_1: \mu > \mu_0$	$t > t_{\alpha;n-1}$

Kriteria Penolakan

Teladan Pengujian Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 tak diketahui dan ukuran contoh kecil ($n \leq 30$)

Waktu rata-rata yang diperlukan oleh seorang nasabah Britama di Kanca BRI X untuk bertransaksi adalah 2,8 menit. Seorang teller baru sedang melakukan uji coba, dan dari sebanyak 12 nasabah Britama, diperoleh rata-rata waktu layanan nasabahnya 2,4 menit dengan simpangan baku 1,4 menit. Ujilah bahwa teller baru tersebut dapat melayani lebih cepat. Gunakan taraf nyata 5% dan asumsikan bahwa populasi waktu yang diperlukan menghampiri sebaran normal.

Teladan Pengujian Rataan Populasi dengan Ragam Populasi σ^2 tak diketahui

H_0: μ = 2,8 vs H_1: μ < 2,8

α = 0,05

Tolak H_0, jika $t_{hit} < -t_{0,05;11} = -1,796$

n = 12   xbar = 2,4 dan s = 1,4

$$t_{hit} = \frac{(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}}{s} = \frac{(2,4 - 2,8)\sqrt{12}}{1,4} = -0,99$$

Karena t_{hit} = -0,99 > -1,796 maka hipotesis nol **diterima**. Artinya : Belum terdapat cukup bukti dengan taraf nyata pengujian 5%, bahwa rata-rata waktu layanan nasabah kurang dari 2,8 menit

Proporsi Populasi

Tipe Pengujian

$$z = \frac{(p - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$$

Statistik Uji

Hipotesis	Daerah Penolakan
$H_0{:}\pi=\pi_0$ vs $H_1{:}\ \pi<\pi_0$	$z<z_{\alpha}$
$H_0{:}\pi=\pi_0$ vs $H_1{:}\ \pi\neq\pi_0$	$z<z_{\alpha/2}$ atau $z>z_{1-\alpha/2}$
$H_0{:}\pi=\pi_0$ vs $H_1{:}\ \pi>\pi_0$	$z>z_{1-\alpha}$

Kriteria Penolakan

Teladan Pengujian Proporsi Populasi

Untuk meningkatkan pelayanan, PT KAI melakukan sebuah survai untuk mendapatkan proporsi penumpang KA yang merasa puas dengan pelayanan selama dalam perjalanan. Dari survai sebanyak 1348 orang penumpang kereta api Argo Lawu diperoleh data bahwa 805 orang merasa puas dengan kenyamanan, ketepatan, dan pelayanan menggunakan jasa transportasi tersebut. Apakah kita dapat simpulkan bahwa kurang dari 60% penumpang kereta api Argo Lawu yang merasa puas dengan layanan mereka ? Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

Kesamaan Ragam Dua Populasi

$$F = {s_1^2}\Big/{s_2^2}$$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \; vs \; H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\qquad F < F_{n_1-1;n_2-1;1-\alpha}$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \; vs \; H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ $\qquad F < F_{n_1-1;n_2-1;1-\alpha/2}$ atau $F > F_{n_1-1;n_2-1;\alpha/2}$

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \; vs \; H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\qquad F > F_{n_1-1;n_2-1;\alpha}$

Teladan Pengujian Kesamaan Ragam Dua Populasi

Data berikut berupa besarnya kredit yang diambil oleh nasabah BRI di dua BRI Unit yang berbeda.

Besarnya kredit (Rp. Juta)

BRI Unit A	10,3	9,4	11,0	8,7	9,8		
BRI Unit B	9,7	8,2	12,3	9,2	17,5	8,8	12,8

Apakah kita dapat simpulkan bahwa ragam / varian besarnya kredit yang diambil nasabah BRI di kedua BRI Unit sama ? Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

Teladan Pengujian Kesamaan Ragam Dua Populasi

$$F_{4;6;0,975} = \frac{1}{F_{6;4;0,025}}$$

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ vs H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$\alpha = 0,05$

Tolak H_0, jika $F_{hit} < F_{4;6;0,975}=0,109$ atau Fhit > $F_{4;6;0,025}=6,23$

$n_1 = 5$ $n_2 = 7$ $s_1 = 0,873$ $s_2 = 3,278$

$$F_{hit} = \frac{0,873^2}{3,278^2} = 0,071$$

Karena $F_{hit} = 0,071 < 0,109$ maka hipotesis nol **ditolak**.
Artinya : Terdapat cukup bukti dengan taraf nyata pengujian 5%, bahwa ragam kedua populasi besarnya kredit di kedua unit berbeda

Beda Rataan Dua Populasi yang Saling Bebas dengan Ragam kedua Populasi diketahui

Tipe Pengujian

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

Statistik Uji

Hipotesis	Daerah Penolakan
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$z < z_\alpha$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$z < z_{\alpha/2}$ atau $z > z_{1-\alpha/2}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$z > z_{1-\alpha}$

Kriteria Penolakan

Beda Rataan Dua Populasi yang Saling Bebas dengan Ragam kedua Populasi tidak diketahui tetapi sama, jumlah kedua sampel kecil

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_d} \qquad s_d = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}\right)}$$

$\nu = n_1 + n_2 - 2$

Hipotesis	Daerah Penolakan
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$t < -t_{\alpha;\nu}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$t < -t_{\alpha/2;\nu}$ atau $t > t_{\alpha/2;\nu}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$t > t_{\alpha;\nu}$

Beda Rataan Dua Populasi yang Saling Bebas dengan Ragam kedua Populasi tidak diketahui dan tidak sama, jumlah kedua sampel kecil

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1+1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2+1)}} - 2$$

Hipotesis	Daerah Penolakan
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 < \mu_2$	$t < -t_{\alpha;\nu}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$t < -t_{\alpha/2;\nu}$ atau $t > t_{\alpha/2;\nu}$
$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs $H_1: \mu_1 > \mu_2$	$t > t_{\alpha;\nu}$

Teladan Soal Pengujian Beda Rataan Dua Populasi yang Saling Bebas

Suatu ujian statistika diberikan pada 20 siswa perempuan dan 15 siswa laki-laki. Siswa-siswa perempuan mencapai rata-rata 76, sedangkan siswa-siswa laki-laki memperoleh rata-rata 82. Diperoleh keterangan bahwa simpangan baku nilai siswa laki-laki 6, sedangkan simpangan baku nilai siswa perempuan 8. Apakah nilai ujian siswa laki-laki dan perempuan sama ? Gunakan taraf nyata pengujian 5%.

Petunjuk Penyelesaian Teladan Soal Pengujian Beda Rataan Dua Populasi yang Saling Bebas

1. Uji terlebih dahulu apakah ragam kedua populasi (yang tidak diketahui tersebut) sama ?
2. Lakukan uji beda rata-rata populasi dengan memperhatikan hasil uji kesamaan dua ragam diatas.

Beda Rataan Dua Populasi yang Saling Tidak Bebas dan ukuran contoh kecil

$$t = \frac{(\delta - \delta_0)\sqrt{n}}{s_d}$$

$$d_i = X_{i1} - X_{i2}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}\bar{d}^2}$$

$$H_0 : \delta = 0 \; vs \; H_1 : \delta < 0$$

$t < -t_{\alpha;n-1}$

$$H_0 : \delta = 0 \; vs \; H_1 : \delta \neq 0$$

$t < -t_{\alpha/2;n-1}$ atau $t > t_{\alpha/2;n-1}$

$$H_0 : \delta = 0 \; vs \; H_1 : \delta > 0$$

$t > t_{\alpha;n-1}$

Beda Rataan Dua Populasi yang Saling Tidak Bebas dan ukuran contoh besar

$$z = \frac{(\delta - \delta_0)\sqrt{n}}{s_d}$$

$$d_i = X_{i1} - X_{i2}$$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}{n-1} - \frac{n}{n-1}\bar{d}^2}$$

$$H_0 : \delta = 0 \ vs \ H_1 : \delta < 0$$

$z<z_{\alpha}$

$$H_0 : \delta = 0 \ vs \ H_1 : \delta \neq 0$$

$z<z_{\alpha/2}$ atau $z>z_{1-\alpha/2}$

$$H_0 : \delta = 0 \ vs \ H_1 : \delta > 0$$

$z>z_{1-\alpha}$

Teladan Soal

Dinyatakan bahwa suatu diet baru dapat mengurangi bobot badan seseorang secara rata-rata 4,5 kilogram dalam dua minggu. Berikut ini dicantumkan bobot badan wanita sebelum dan sesudah mengikuti program diet selama 2 minggu tersebut.

Bobot	Wanita						
	1	2	3	4	5	6	7
Sebelum	58,4	60,3	61,7	69,2	64,0	62,6	56,7
Sesudah	60,0	54,8	58,1	62,1	58,5	59,9	54,4

Dengan taraf nyata pengujian 5%, tunjukkan apakah bahwa pernyataan diatas benar, bila sebaran bobot badan itu menghampiri sebaran normal.

Beda Proporsi Dua Populasi dengan asumsi kedua proporsi populasi diketahui

$$z = \frac{p_1 - p_2}{\sigma_{p_1 - p_2}} \qquad \sigma_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{\pi_1(1-\pi_1)}{n_1} + \frac{\pi_2(1-\pi_2)}{n_2}}$$

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \ vs \ H_1 : \pi_1 < \pi_2$$

$z < z_{\alpha}$

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \ vs \ H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$$

$z < z_{\alpha/2}$ atau $z > z_{1-\alpha/2}$

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \ vs \ H_1 : \pi_1 > \pi_2$$

$z > z_{1-\alpha}$

Beda Proporsi Dua Populasi dengan asumsi kedua proporsi populasi tidak diketahui

$$z = \frac{p_1 - p_2}{s_{p_1 - p_2}}$$

$$s_{p_1 - p_2} = \sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

p adalah proporsi gabungan kedua contoh populasi

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \ vs \ H_1 : \pi_1 < \pi_2$$

$z < z_{\alpha}$

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \ vs \ H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$$

$z < z_{\alpha/2}$ atau $z > z_{1-\alpha/2}$

$$H_0 : \pi_1 = \pi_2 \ vs \ H_1 : \pi_1 > \pi_2$$

$z > z_{1-\alpha}$

Teladan Pengujian Beda Dua Proporsi

Suatu jajak pendapat dilakukan terhadap penduduk kota dan sekitar kota untuk menyelidiki kemungkinan diajukannya rencana pembangunan Mall. Bila 2400 di antara 5000 penduduk kota dan 1200 di antara 2000 penduduk sekitar kota yang diwawancarai setuju akan rencana tersebut. Dengan taraf nyata 10%, lakukan pengujian apakah proporsi penduduk kota dan penduduk sekitar kota yang setuju pendirian mall sama ?

Teladan Pengujian Beda Dua Proporsi Populasi

H_0: $\pi_1 = \pi_2$ vs H_1: $\pi_1 \neq \pi_2$

$\alpha = 0,10$

Tolak H_0, jika $z_{hit} < z_{0,05} = -1,645$ atau $z_{hit} > z_{0,95} = +1,645$

$p_1 = 2400/5000$ $p_2 = 1200/2000$ $p = 3600/7000$

$$z_{hit} = \frac{(p_1 - p_2)}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{(0,48 - 0,60)}{\sqrt{(0,51)(0,49)\left(\frac{1}{5000} + \frac{1}{2000}\right)}} = -9,073$$

Karena $z_{hit} = -9,073 < -1,645$ maka hipotesis nol **ditolak**. Artinya : Terdapat cukup bukti dengan taraf nyata pengujian 10%, bahwa proporsi kedua populasi yang setuju terhadap pembangunan mall berbeda.