Teori Antrian
(*Queuing Theory*)

Disusun oleh :
Prof. Ir. Sigit Nugroho, M.Sc., Ph.D.
Universitas Bengkulu
e-mail : sigit.nugroho.1960@gmail.com

Antrian

- Terjadi bilamana banyaknya pelanggan yang akan dilayani melebihi kapasitas layanan yang tersedia.
  - Penambahan layanan : dpt mengurangi antrian atau menghindari antrian yang terus membesar. Penambahan ini dpt menyebabkan keuntungan berkurang atau dibawah taraf yang diterima.
  - Antrian yang terlalu panjang dapat mengakibatkan kehilangan penjualan atau pelanggan
- Sistem Antrian terdiri dari pelanggan yang datang dengan laju yang konstan atau bervariasi untuk mendapatkan layanan pada suatu fasilitas layanan.
  - Jika pelanggan yang datang dapat memasuki fasilitas layanan, mereka dpt langsung dilayani
  - Jika harus menunggu dilayani, mereka berpartisipasi membentuk antrian, dan akan berada dalam antrian hingga mereka dapat giliran untuk dilayani

Sistem Antrian

- **Proses Input** → banyaknya kedatangan per satuan waktu, jumlah antrian yang dpt dibuat, maksimum panjang antrian, dan maksimum jumlah pelanggan potensial.
- **Proses Layanan** → Sebaran Waktu utk melayani seorang pelanggan, banyaknya layanan yang tersedia, dan pengaturan layanan (seri atau paralel)
- **Disiplin Antrian** → FIFO, LIFO, Acak, Prioritas, dan lain sebagainya

Asumsi

Dalam hal ini, kita asumsikan bahwa:

- **Disiplin antrian : FIFO**
  - Pelanggan yang datang duluan akan dilayani terlebih dahulu
- **Datangnya pelanggan secara acak dengan laju tertentu.**
  - Kedatangan memiliki kesempatan yang sama kapan saja dan tidak tergantung oleh waktu yang telah berlalu sejak kedatangan terakhir
- **Sistem antrian dalam kondisi *steady-state***
  - Sistem antrian telah beroperasi cukup lama, bebas dari keadaan awal sistem dan tidak tergantung dari waktu

Notasi

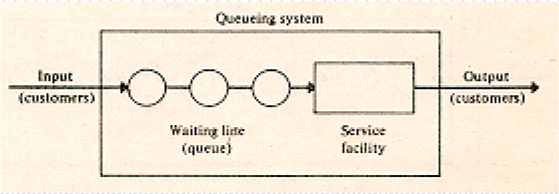
S_n = Banyaknya pelanggan yang berada di dalam sistem

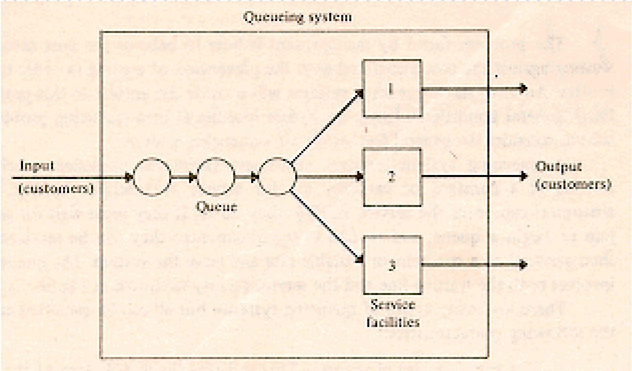
$P_n(t)$ = Peluang n pelanggan berada dalam sistem pada waktu t

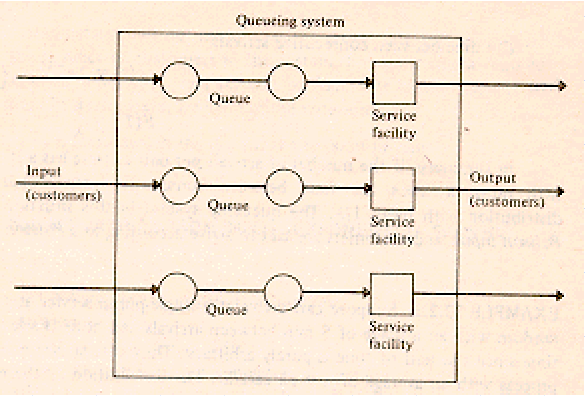
λ_n = rataan laju kedatangan apabila n pelanggan berada di dalam sistem (sedang menunggu atau dilayani)

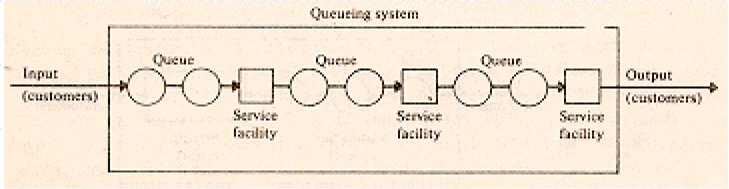
μ_n = rataan laju layanan apabila n pelanggan berada di dalam sistem

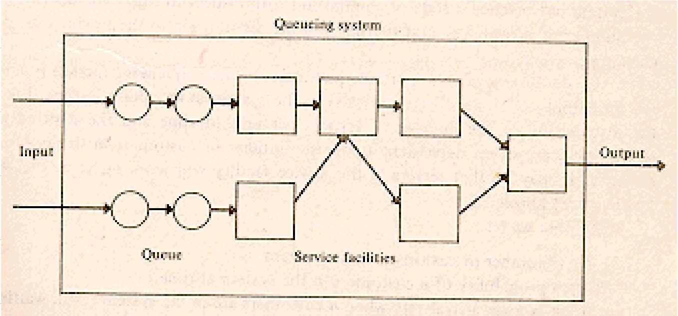
Ilustrasi Antrian











Model Antrian

Input Poisson dan Layanan Eksponensial

Asumsi untuk model ini adalah

- Datangnya pelanggan secara acak
- Kedatangan membentuk antrian tunggal
- Disiplin Antrian : FIFO
- Keluarnya pelanggan dari sistem (setelah dilayani) juga acak.
- Peluang datangnya pelanggan dalam interval waktu Δt adalah $\lambda_n \Delta t$
- Peluang keluarnya pelanggan dalam interval waktu Δt adalah $\mu_n \Delta t$
- Peluang datangnya/keluarnya lebih dari satu pelanggan dalam interval waktu Δt dapat diabaikan.

Model Antrian

Input Poisson dan Layanan Eksponensial

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} P_0 = \left(\frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \right) P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \right)}$$

Model Antrian

Input Poisson dan Layanan Eksponensial

- Model Antrian Takhingga – Sumber Takhingga
  - – Layanan Tunggal
  - – Layanan Ganda
- Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga
  - – Layanan Tunggal
  - – Layanan Ganda
- Model Antrian Sumber Terbatas dan Layanan Ganda

Model Antrian Takhingga – Sumber Takhingga – Layanan Tunggal

- Asumsi lain yang perlu ditambahkan
  - Rata-rata laju kedatangan konstan, untuk semua n berlaku $\lambda_n = \lambda$
  - Rata-rata laju layanan konstan, untuk semua n berlaku $\mu_n = \mu$
  - Rata-rata laju kedatangan lebih kecil dari rata-rata laju layanan, $\lambda < \mu$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \qquad P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Model Antrian Takhingga – Sumber Takhingga – Layanan Tunggal

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

Rata2 banyaknya pelanggan berada dalam sistem

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Rata2 banyaknya pelanggan berada dalam antrian

$$L_W = \frac{\mu}{\mu - \lambda}$$

Rata2 banyaknya pelanggan berada dalam antrian
Yang tak kosong

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Rata2 waktu yang diperlukan pelanggan berada dalam sistem

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Rata2 waktu yang diperlukan pelanggan berada Dalam antrian

$$P(n > k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

Peluang terdapat lebih dari k pelanggan berada dalam sistem

$$P(T > t) = e^{-\mu(1-\lambda/\mu)t}$$

Peluang waktu seorang pelanggan berada dalam sistem sedikitnya t satuan waktu

Model Antrian Takhingga – Sumber Takhingga – Layanan Tunggal

Pelanggan yang datang ke sebuah pangkas rambut layanan tunggal, mengikuti proses Poisson dengan rataan waktu antar kedatangan berurutan 20 menit. Pelanggan memerlukan rata-rata 15 menit untuk di pangkas rambutnya.

Berapa peluang seorang pelanggan tidak harus menunggu untuk dilayani ?

Dari informasi diatas berarti λ = 3 pelanggan/jam dan μ = 4 pelanggan/jam. Selanjutnya dengan menggunakan formula yang ada kita peroleh P_0 = peluang tak ada pelanggan di dalam sistem, sehingga seseorang dapat langsung dilayani tanpa harus menunggu = 1-3/4 = ¼ = 0,25

Berapakah rata-rata jumlah pelanggan yang datang ke pangkas rambut tersebut ?

L_W = 3/(4-3) = 3 pelanggan

Berapa rata-rata waktu seorang pelanggan akan berada dalam pangkas rambut tersebut ?

W = 1/(4-3) = 1 jam

Model Antrian Takhingga – Sumber Takhingga – Layanan Ganda

- Asumsi lain yang perlu ditambahkan
  - Terdapat sejumlah s layanan
  - Tiap pemberi layanan memberikan layanan dengan rata2 laju yang sama dan konstan m.
  - Rata2 laju kedatangan jua konstan, untuk semua n berlaku $\lambda_n = \lambda$
  - $\lambda < s\mu$

$$P(T > t) = e^{-\mu t}\left\{1 + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0\left[1 - e^{-\mu t\left(s-1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}\right]}{s!\left(1 - \frac{\lambda}{\mu s}\right)\left(s - 1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}\right\}$$

Model Antrian Takhingga – Sumber Takhingga – Layanan Ganda

$$P_0 = \frac{1}{\left\{\left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] + \frac{1}{s!\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\right\}}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n = 0,1,2,\ldots,s-1 \\ \frac{1}{s!\,s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & n = s, s+1,\ldots. \end{cases}$$

$$P(n \geq s) = \sum_{n=s}^{\infty} P_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s P_0}{s!\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)}$$

$$L_Q = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} P_0}{s \cdot s!\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)^2}$$

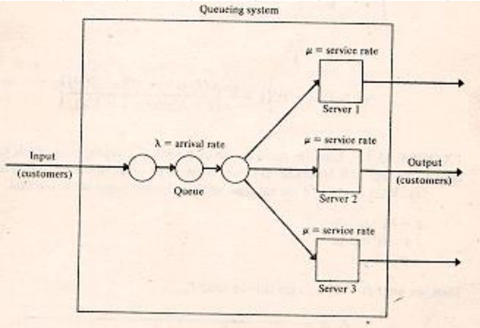
$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$L = L_Q + \frac{\lambda}{\mu}$$

Model Antrian Takhingga – Sumber Takhingga – Layanan Ganda (Teladan Soal)

Misalkan terdapat tiga teller pada sebuah Bank. Setiap teller dapat melayani nasabah dengan rata-rata 6 orang per jam. Jika Nasabah yang masuk ke Bank per jamnya sebanyak 15 orang.



a. Berapa fraksi waktu dimana semua teller sibuk ?

$$P_0 = \frac{1}{\left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{3\mu}\right)}\right]} = 0{,}044944$$

$P(n \geq 3) = 0{,}70225$

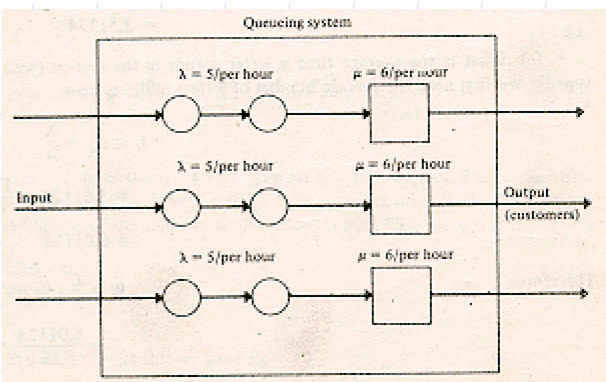
b. Berapa rata-rata banyaknya nasabah yang menunggu layanan ? $L_Q = 3{,}51124$

c. Berapa rata-rata waktu seorang nasabah berada dalam Bank tersebut ? $W \approx 0{,}40075$ jam ≈ 24 mnt

Model Antrian Takhingga – Sumber Takhingga – Layanan Ganda (Teladan Soal) … lanjutan

d. Berapa peluang seorang nasabah menunggu lebih dari 20 menit berada dalam antrian dan sedang akan dilayani oleh teller tersebut ?

$$P\left(T > \frac{20}{60}\right) = 0{,}46198$$



e. Misalkan setiap teller secara terpisah menerima antrian nasabah yg harus dilayani dgn laju 5 orang/jam, masih dgn asumsi bahwa tiap teller dpt melayani dgn rata-rata 6 surat/jam. Berapa rata-rata waktu yang diperlukan seorang nasabah berada dlm Bank dengan model ini ?

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = 1$$

Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga – Layanan Tunggal

Situasi dimana

- Pemberi layanan : satu
- Ruang tunggu terbatas (misalnya kapasitas maksimum nasabah dalam sistem ada **M :** 1 dilayani dan M-1 antri), seperti :
  - *Drive-in bank*
  - *Do-it-yourself car wash*
  - *Drive-thru fast food restaurant*
  - *Salon dgn tempat duduk yang terbatas*

Dengan demikian → $\mu_n = \mu$ untuk n = 1,2,3,...
dan $\lambda_n = \lambda$ untuk n = 0,1,2,...,M-1 serta $\lambda = 0$ untuk n = M,M+1,M+2,...

Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga – Layanan Tunggal

$$P_0 = \frac{1}{\left[1 + \sum_{n=1}^{M}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right]} = \frac{1}{\left[\frac{1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{M+1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}\right]} = \begin{cases} \dfrac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{M+1}} & untuk\ \lambda \neq \mu \\ \dfrac{1}{M+1} & untuk\ \ \lambda = \mu \end{cases}$$

$$P_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & untuk\ \ \lambda \neq \mu \quad n = 0,1,2,\ldots,M \\ P_0 & untuk\ \ \lambda = \mu \end{cases}$$

Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga – Layanan Tunggal

$$L = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} - \dfrac{(M+1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{M+1}}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{M+1}} & untuk \quad \lambda \neq \mu \\ \dfrac{M}{2} & untuk \quad \lambda = \mu \end{cases}$$

$$W = \frac{L}{\lambda_{eff}}$$

$$L_Q = L - (1 - P_0) = L - \frac{\lambda_{\text{eff}}}{\mu}$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga – Layanan Tunggal (Teladan Soal)

Sebuah pangkas rambut layanan tunggal memiliki 6 kursi yang disediakan untuk pelanggan menunggu giliran pangkas rambut. Diasumsikan bahwa pelanggan yang datang apabila semua kursi penuh, terus pergi tanpa masuk dalam sistem. Laju datangnya pelanggan adalah 3 orang per jam dan diperlukan rata-rata sekitar 15 menit untuk melayani pelanggan.

a. Berapakah peluang seorang pelanggan dapat dilayani tanpa harus menunggu ?

   Dengan $M = 7$, $\lambda = 3$ per jam dan $\mu = 4$ per jam, maka

   $P_0 = 0{,}2778$

b. Berapakah rata-rata banyaknya pelanggan menunggu dalam antrian ?

   $L = 2{,}11$ sehingga

   $L_Q = 2{,}11-(1-0{,}2778) = 1{,}39$

c. Berapakah nilai laju kedatangan efektifnya ?

   $\lambda_{eff} = 4(1-0{,}2778) = 2{,}89$ per jam

d. Berapa lama seorang pelanggan berharap akan berada dalam ruang pangkas rambut ?

   $W = 2{,}11/2{,}89 = 0{,}73$ jam atau 43,8 menit

e. Berapakah fraksi pelanggan potensial yang mengurungkan niatnya masuk ke ruang pangkas rambut ?

   P(7 dalam sistem) $= P_7 \approx 0{,}037$ atau 3,7%.

Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga – Layanan Ganda

Situasi dimana

- Pemberi layanan lebih dari satu (**s**)
- Ruang tunggu terbatas (misalnya kapasitas maksimum nasabah dlm sistem ada sebanyak **M**)
- $s < M$

Dengan demikian → $\mu_n = n\mu$ untuk n = 1,2,3,...,s serta $\mu_n = s\mu$ untuk n = s+1,s+2,... dan $\lambda_n = \lambda$ untuk n = 0,1,2,...,M-1 serta $\lambda = 0$ untuk n = M,M+1,M+2,...

Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga – Layanan Ganda

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s}\left(\frac{1}{n!}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s \sum_{n=s+1}^{M}\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{n-s}}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & untuk \quad n \le s \\ \frac{1}{s!s^{n-s}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 & untuk \quad s < n \le M \\ 0 & untuk \quad n > M \end{cases}$$

Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga – Layanan Ganda

$$L_Q = \frac{P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^s\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)}{s!\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)^2}\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{M-s}-(M-s)\left(\frac{\lambda}{\mu s}\right)^{M-s}\left(1-\frac{\lambda}{\mu s}\right)\right]$$

$$L = L_Q + s - \sum_{n=0}^{s-1}(s-n)P_n \qquad W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

$$\lambda_{eff} = \mu\left[s - \sum_{n=0}^{s-1}(s-n)P_n\right] \qquad W = \frac{L}{\lambda_{eff}}$$

Model Antrian Terhingga – Sumber Takhingga – Layanan Ganda

Sebuah pangkas rambut dengan dua layanan memiliki 5 kursi untuk para pelanggan yang menunggu layanan pangkas rambut. Pelanggan akan langsung pergi tanpa harus masuk tempat pangkas rambut apabila semua kursi tunggu tersebut penuh. Rata-rata laju datangnya pelanggan 3,7634 per jam dan rata-rata pemangkas rambut hanya perlu waktu 15 menit untuk memangkas rambut pelanggan.

a. Berapakah peluang seorang pelanggan yang datang akan langsung dilayani ?

b. Berapakah rata-rata banyaknya pelanggan harus menunggu untuk dilayani ?

c. Berapa lama seorang pelanggan berharap akan berada di dalam sistem ?

d. Berapakah peluang seorang pelanggan potensial terpaksa tak dapat masuk tempat pangkas rambut ?

Model Sumber Terbatas – Layanan Ganda

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1} \binom{N}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \sum_{n=s}^{N} \frac{n!}{s!\,s^{n-s}} \binom{N}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \binom{N}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & untuk \quad 0 \le n \le s \\ P_0 \frac{n!}{s!\,s^{n-s}} \binom{N}{n} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & untuk \quad s < n \le N \end{cases}$$

$$L_Q = \sum_{n=s+1}^{N} (n-s) P_n \qquad \lambda_{eff} = \mu \left[s - \sum_{n=0}^{s} (s-n) P_n \right]$$

Model Sumber Terbatas – Layanan Ganda

$$L = L_Q + \frac{\lambda_{eff}}{\mu}$$

$$\lambda_{eff} = \mu\left[s - \sum_{n=0}^{s}(s-n)P_n\right] = \lambda(N-L)$$

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda_{eff}}$$

$$W = \frac{L}{\lambda_{eff}}$$

Model Sumber Terbatas – Layanan Ganda

Misalkan dua teknisi memiliki tanggungjawab masing-masing untuk menjaga lima mesin yang sensitif untuk tetap bekerja atau berfungsi. Tiap mesin memiliki laju kerusakan sekali dalam satu jam. Sebagai tambahan, kedua teknisi dapat memperbaiki mesin dengan laju yang sama yaitu 4 per jam.

a. Dapatkan rata-rata banyaknya mesin yang menunggu diperbaiki.

$P_0 = 0{,}314932$

$L_Q = 0{,}118$

b. Dapatkan rata-rata banyaknya mesin yang tak dapat berfungsi.

$L = 1{,}094$

c. Dapatkan laju kerusakan efektif dari kelima mesin.

$\lambda_{eff} = 3{,}904$