# Teori Permainan

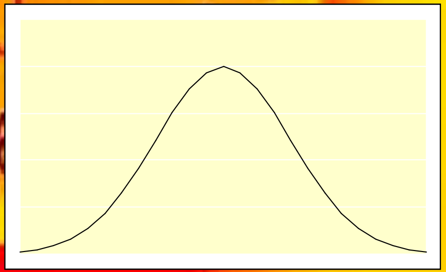
*(Game Theory)*


Disusun oleh :

**Prof. Ir.Sigit Nugroho, M.Sc. Ph.D.**

Universitas Bengkulu


σμρ



# Pay-off Matrix
## Two person zero sum game

$a_i$ = tindakan yang diambil pemain pertama; $b_j$ = tindakan yang diambil pemain kedua. $p_{ij}$ merupakan ***payoff*** akibat interaksi kedua pemain

$$
\begin{array}{c|ccc|}
 & b_1 & \cdots & b_n \\
\hline
a_1 & p_{11} & \cdots & p_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_m & p_{m1} & \cdots & p_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

# Strategi Permainan

Keputusan bermain baris (kolom) tertentu dengan peluang 1 dan semua baris (kolom) yang lain dengan peluang 0 disebut dengan strategi murni (***pure strategy***) dari pemain pertama (kedua).

Setiap pemain tahu bahwa lawan main rasional dan memiliki tujuan yang sama, yaitu memaksimumkan payoff dari lawan, sehingga masing-masing memilih keputusan dengan menggunakan kriteria minimax konservatif.

# Maximin dan Minimax
## serta nilai permainan

*Strategi murni maximin*

$$\underline{v} = p_{rs} = \max_{i}\left[\min_{j}(p_{ij})\right]$$

*Strategi murni minimax*

$$\bar{v} = p_{tu} = \min_{j}\left[\max_{i}(p_{ij})\right]$$

Jika nilai minimax sama dengan nilai maximin, maka nilai ini disebut dengan titik pelana (***saddle point***), dan strategi murni minimax dan maximinnya disebut dengan strategi optimal.

$$\bar{v} > \underline{v}$$

# Maximin dan Minimax
## Teladan

| | Pemain 2 | | | Min Baris | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 4 | 1 | 1 | |
| Pemain 1 | 3 | 5 | 4 | 3 | Maximin Baris |
| Max Kolom | 3 | 5 | 4 | | |
| | Minimax Kolom | | | | |

# Strategi Campuran
## dan Harapan Payoffnya

Pemain pertama memutuskan untuk bermain dengan strategi baris ke i dengan peluang $x_i$ (i = 1, 2, …, m) dimana lebih dari satu $x_i$ lebih besar dari nol.

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

X adalah strategi campuran pemain pertama

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

# Strategi Campuran
## dan Harapan Payoffnya

Pemain kedua memutuskan bermain dengan menggunakan strategi kolom j dengan peluang $y_j$ (dimana j = 1, 2, …, n) dimana lebih dari satu $y_j$ lebih besar dari nol.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_j & \dots & y_n \end{bmatrix}$$

Y adalah strategi campuran pemain kedua

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

# Strategi Campuran
## dan Harapan Payoffnya

$$E(Payoff) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j p_{ij}$$

# Strategi Maximin Optimal

## Pemain pertama

$$X^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ \cdots \\ x_i^* \\ \cdots \\ x_m^* \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j p_{ij}$$

Sebesar mungkin

# Strategi Minimax Optimal
## Pemain kedua

$$Y^* = \begin{bmatrix} y_1^* & \dots & y_j^* & \dots & y_n^* \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j^* p_{ij}$$

Sekecil mungkin

# Akibatnya …

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j p_{ij} \geq v \quad \forall\, Y$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j^* p_{ij} \leq v \quad \forall\, X$$

$$E(Payoff) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^* y_j^* p_{ij} = v$$

# Permainan 2 x 2

**Langkah 1** : Periksa adanya titik pelana dalam matriks payoff. Jika sedikitnya ada satu titik pelana, maka strategi minimax optimalnya adalah strategi murni. Jika tak ada titik pelana lakukan langkah 2.

**Langkah 2** : Strategi minimax optimal untuk pemain pertama dan kedua adalah sebagai berikut

$$x_1^* = \frac{p_{22} - p_{21}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} \qquad x_2^* = 1 - x_1^*$$

$$y_1^* = \frac{p_{22} - p_{12}}{p_{11} + p_{22} - p_{12} - p_{21}} \qquad y_2^* = 1 - y_1^*$$

**Langkah 3** : Menghitung nilai permainan

$$v = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} x_i^* y_j^* p_{ij}$$

# Teladan Permainan 2 x 2

$$\begin{array}{cc} & \text{Pemain 2} \\ \text{Pemain 1} & \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Tentukan strategi campuran dan nilai nya !

# Dominansi

suatu usaha untuk mengurangi ukuran matriks payoff

- Baris ke-i mendominasi baris ke-k dala matriks payoff jika $p_{ij} \geq p_{kj}$ untuk j = 1,2, …, n.
  - Bila ini terjadi, baris ke-k dapat dieliminasi dari proses perhitungan
- Kolom ke-j mendominasi kolom ke-k dalam matriks payoff $p_{ij} \geq p_{ik}$ untuk i = 1,2, …, m.
  - Bila ini terjadi, kolom ke-j dapat dieliminasi dari proses perhitungan

# Dominansi

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

# Perluasan Dominansi

Perihal dominansi dapat diperluas pada kasus dimana suatu baris dapat didominasi oleh kombinasi konvex (*convex combination*) baris-baris yang lain.

$$\sum_{i=1;i\neq k}^{m} \lambda_i p_{ij} \geq p_{kj} \quad j=1,2,\ldots,n \qquad \sum_{i=1;i\neq k}^{m} \lambda_i = 1$$

Suatu kolom dapat didominasi oleh kombinasi konvex (*convex combination*) kolom-kolom yang lain.

$$p_{ik} \geq \sum_{j=1;\,j\neq k}^{n} \lambda_j p_{ij} \quad i=1,2,\ldots,m \qquad \sum_{j=1;\,j\neq k}^{n} \lambda_j = 1$$

# Solusi Permainan 2 x n

| | | Pemain 2 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $y_1$ | $y_2$ | … | $y_n$ |
| Pemain 1 | $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | … | $p_{1n}$ |
| | $1-x_1$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | … | $p_{2n}$ |

# Solusi Permainan 2 x n

1. Periksa adanya titik pelana. Jika ada, maka strategi minimax optimal adalah strategi murni. Mainkan baris dan kolom titik pelana dengan peluang 1. Titik pelana merupakan nilai permainan. Jika tak ada titik pelana pergi ke langkah 2.
2. Periksa dominansi kolom. Hilangkan kolom yang mendominasi kolom2 lain termasuk dengan menggunakan konsep kombinasi konvex. Hal ini digunakan untuk mengurangi ukuran permainan dan tak diperlukan dengan menggunakan metode grafik

# Solusi Permainan 2 x n

3. Tuliskan kendala

   $x_1 p_{1j} + (1-x_1)p_{2j} \geq v$ untuk sejumlah j kolom yang tidak tereliminasi pada langkah 2 atau

   $v - (p_{1j}-p_{2j})x_1 \leq p_{2j}$

4. Tuliskan kendala pada langkah 3 dalam bentuk

   $v - (p_{1j}-p_{2j})x_1 = p_{2j}$

5. Plot persamaan-persamaan dalam langkah 4. Persamaan2 ini akan membentuk batas atas wilayah layak yang didiskripsikan oleh kendala dalam langkah 3 untuk $0 \leq x_1 \leq 1$, jika $v$ diplotkan sebagai fungsi dari $x_1$.