Rantai Markov

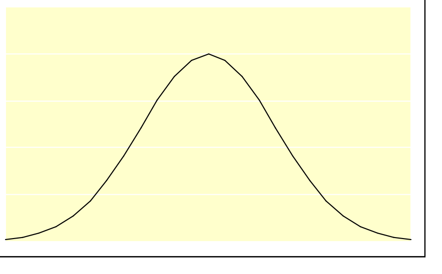
(Markov Chains)

Disusun oleh :

Prof. Ir. Sigit Nugroho, M.Sc., Ph.D

Universitas Bengkulu

σμρ



Pendahuluan

Misalkan sebuah sistem dimana seseorang pada suatu saat hanya dapat berada dalam satu dan hanya satu tempat dari sejumlah terbatas tempat yang mungkin.

Contoh lain, misal seseorang pada suatu saat memilih merk X ia dikatakan berada di *state* 0, bila ia memilih merk Y ia dikatakan berada di *state* 1, bila ia memilih merk Z ia berada di *state* 2, dan seterusnya.

Mungkin akan timbul beberapa pertanyaan

1. Jika pada saat ini sistem berada di state r, berapakah peluang sistem akan berada di state s, n tahap dari sekarang ?
2. Setelah sejumlah besar tahap, berapakah peluang sistem akan berada di state s ?
3. Jika perusahaan saat ini memiliki tingkat "share of the market", seberapa besar share tersebut n tahap dari sekarang ?
4. Akankah "share of the market" dari kompetitor akan stabil di masa mendatang ?

Pendahuluan

Model markov atau Rantai Markov dapat digunakan untuk menjawab masalah tersebut dan hal-hal lain yang berkenaan dengan sistem yang dinamis. Model Markov ini telah digunakan untuk menganalisis permasalahan inventori, perubahan merk kesukaan, penggantian alat, pertumbuhan populasi, masalah akuntansi, lokasi pabrik, dan semua permasalahan yang berkenaan dengan sistem dinamis. Kita tertarik untuk menganalisa sistem yang mana state dari sistem mendatang tergantung pada state saat ini dan bebas dari state sistem masa lalu.

Properti Markovian Orde-1

Jika sebaran peluang bersyarat X_i bebas terhadap state sistem pada tahap 0,1,2,…,i-1 dan hanya tergantung pada state sistem tahap i, maka proses stokastik $\{X_i\}$ dikatakan memiliki properti Markovian order pertama. Dengan demikian proses stokastik $\{X_i\}$ memliki properti Markovian order pertama jika

$$P(X_{i+1}=s \mid X_0=t_0, X_1=t_1, \ldots, X_{i-1}=t_{i-1}, X_i=r)=P(X_{i+1}=s \mid X_i=r)$$

Peluang Transisi Stasioner

Jika untuk setiap r dan s $P(X_{i+1} = s \mid X_i = r) = P(X_1 = s \mid X_0 = r) = p_{rs}$

untuk semua i, maka peluang transisi setahap tersebut dikatakan stasioner.
Dengan demikian, peluang pergi dari state r pada tahap saat ini ke state s pada tahap berikutnya bebas terhadap bilangan tahap sekarang. Perlu diketahui bahwa peluang transisi setahap stasioner ini tetap konstan sepanjang waktu analisis.

Peluang Transisi Stasioner n-tahap

$$p_{rs}^{(n)} = P(X_{i+n} = s \mid X_i = r) = P(X_n = s \mid X_0 = r)$$

$$p_{rs}^{(n)} \geq 0 \qquad \sum_{s=0}^{N} p_{rs}^{(n)} = 1$$

$$p_{rs}^{(n)} = \sum_{j=0}^{N} p_{rj} p_{js}^{(n-1)}$$

Persamaan Chapman-Kolmogorov

$$P_{rs}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{rk}^{(n)} P_{ks}^{(m)}$$

Peluang Transisi Stasioner yang Stabil

Misalkan sebuah sistem memiliki N+1 state 0, 1, 2, …, N. Jika untuk suatu nilai n $p_{rs}^{(n)} > 0$ untuk r = 0, 1, 2, …, N dan s = 0, 1, 2, …,N dan jika $p_{rr} > 0$ untuk r = 0, 1, 2, …, N maka $\lim_{n \to \infty} p_{rs}^{(n)} = a_s$ untuk s = 0, 1, 2, …,N

Besaran a_s merupakan peluang transisi stasioner yang stabil (*steady-state stationary transition probability*) berada dalam state s setelah sejumlah besar tahapan. Dengan perkataan lain, jika setiap state akhirnya dapat dicapai dari state lainnya (mungkin dalam sejumlah besar tahap), jika sistem dapat berada dalam sembarang state dalam dua tahap berturutan, maka peluang berada dalam sembarang state setelah sejumlah besar tahapan adalah konstan. Konstanta ini disebut sebagai peluang stabil (*steady-state probability*) dari state tersebut.

$$a_s = \sum_{r=0}^{N} a_r p_{rs} \qquad \sum_{s=0}^{N} a_s = 1$$

Waktu Singgah Pertama

Sering menjadi perhatian bahwa kita ingin mengetahui sesuatu tentang waktu transisi dalam rantai Markov. Informasi tentang waktu transisi biasanya didefinisikan sebagai waktu singgah pertama (*first-passage time*).

Banyaknya transisi atau tahap yang diperlukan pergi dari state r ke state s pertama kali didefinisikan sebagai waktu singgah pertama dari state r ke state s, yang dinotasikan dengan T_{rs}.

Jika peluang sistem pergi dari state r ke state s akhirnya (mungkin dalam sejumlah besar tahapan) sama dengan 1, maka waktu singgah pertama tersebut T_{rs} merupakan peubah acak; jika tidak maka nilai tersebut akan ∞.

Waktu Singgah Pertama

Sebagai contoh jika diberikan peluang transisi stasioner setahap sebagai berikut

State	0	1	2
0	0	½	½
1	½	½	0
2	0	½	½

Maka waktu singgah pertama antar dua state adalah peubah acak. Lebih lanjut dapat dilihat, peluang tak pernah mencapai state tertentu selalu nol.

Terminologi

- State s dikatakan *accessible* (dapat dijangkau) dari state r, jika untuk beberapa nilai n ≥ 0, $P_{rs}^{(n)} > 0$.
- State r dan s dikatakan saling berkomunikasi jika saling dapat dijangkau, dan dituliskan dengan $r \leftrightarrow s$
  - Komunikasi merupakan relasi yang ekuivalen.
    - $r \leftrightarrow s$
    - Jika $r \leftrightarrow s$, maka $s \leftrightarrow r$
    - Jika $r \leftrightarrow s$ dan $s \leftrightarrow t$, maka $r \leftrightarrow t$
- Dua state yang saling berkomunikasi dikatakan berada dalam satu kelas.

Terminologi

- Rantai Markov dikatakan *irreducible* (tak dapat direduksi) jika hanya terdiri dari satu kelas atau jika semua state saling berkomunikasi dengan lainnya.
- State r dikatakan memiliki periode d jika $P_{rr}^{(n)} = 0$ bila n tak dapat dibagi dengan d dan d adalah bilangan bulat terbesar dengan properti ini.
  - Jika $P_{rr}^{(n)} = 0$ untuk semua $n > 0$, maka periode r dikatakan tak hingga.
  - State dengan periode 1 dikatakan *aperiodic*.
- Jika $i \leftrightarrow j$, maka $d(i) = d(j)$

Aplikasi Model Markov

Long run market share

Matriks peluang transisi stasioner satu tahap (P)

	X	**Y**	**Lain**
X	0.90	0.02	0.08
Y	0.04	0.87	0.09
Lain	0.15	0.12	0.73

Aplikasi Model Markov
Long run market share

Matriks peluang transisi stasioner dua tahap (P^2)

	X	**Y**	**Lain**
X	0.823	0.045	0.132
Y	0.084	0.769	0.147
Lain	0.249	0.195	0.556

Aplikasi Model Markov
Long run market share

Matriks peluang transisi stasioner delapan tahap (P^8)

	X	**Y**	**Lain**
X	0.594	0.181	0.225
Y	0.303	0.460	0.237
Lain	0.436	0.303	0.261

Aplikasi Model Markov

Long run market share

Matriks peluang transisi stasioner enam belas tahap (P^{16})

	X	**Y**	**Lain**
X	0.506	0.259	0.235
Y	0.423	0.339	0.239
Lain	0.465	0.297	0.238

Aplikasi Model Markov
Long run market share

Matriks peluang transisi stasioner tiga puluh dua tahap (P^{32})

	X	**Y**	**Lain**
X	0.475	0.289	0.237
Y	0.468	0.295	0.237
Lain	0.471	0.292	0.237

Aplikasi Model Markov

Long run market share

Matriks peluang transisi stasioner enam puluh empat tahap (P^{64})

	X	**Y**	**Lain**
X	0.472	0.291	0.237
Y	0.472	0.291	0.237
Lain	0.472	0.291	0.237