

Teknik Review & Evaluasi Program / Metode Jalur Kritis (PERT/CPM)

Disusun oleh :

Prof. Ir. Sigit Nugroho, M.Sc., Ph.D.

Universitas Bengkulu

e-mail : sigit.nugroho.1960@gmail.com





Pendahuluan

- Salah satu alat riset operasi yang digunakan pada proyek berskala besar untuk membantu manajemen dalam pengekspedisian dan pengendalian penggunaan personil, material, fasilitas, dan waktu.
- menunjukkan daerah kritis di dalam proyek sehingga penyesuaian seperlunya dapat dilakukan untuk memenuhi waktu penyelesaian proyek sesuai dengan jadwal.
- diaplikasikan untuk riset berskala besar dan proyek pengembangan yang memiliki derajat ketidakpastian yang besar, seperti pengembangan produk baru dan pemasaran.
- PERT dikembangkan pada tahun 1958-1959 sebagai suatu alat riset dan pengembangan program U.S. Navy Polaris Missile. Program Polaris ini selesai 18-24 bulan lebih dini dari yang dijadwalkan. Sejak 1959 PERT telah dipakai dengan sukses dalam setiap industri berskala besar, seperti: industri komputer, industri perfilman dan militer



Pendahuluan

- Metode Jalur Kritis atau *Critical Path Method* (**CPM**) merupakan alat perencanaan dan pengkoordinasian lainnya. Alat ini dikembangkan dalam industri konstruksi dimana pengalaman sebelumnya digunakan untuk memperoleh estimasi waktu dan biaya berbagai fase proyek. Pengembangan CPM ini disponsori oleh E.I. du Pont de Nemours & Company dengan the Sperry-Rand Corporation. Pertama kali diaplikasikan pada pembangunan pabrik kimia dan kemudian dalam penghentian produksi pabrik tersebut untuk turun mesin dan maintenance.



Jaringan PERT

- Tahap pertama dalam analisis PERT adalah mengidentifikasi subproyek atau tugas yang harus diselesaikan sebelum keseluruhan proyek selesai. Setiap tugas atau pekerjaan yang selanjutnya disebut sebagai **aktivitas** memerlukan informasi waktu dan sumberdaya lainnya. Aktivitas ini menggambarkan pekerjaan yang harus diselesaikan. Sumberdaya dapat berbentuk tenaga kerja, uang, material, fasilitas, dan/atau ruang. Aktivitas harus jelas sehingga tidak semua aktivitas dapat diselesaikan dalam waktu yang sama. Beberapa aktivitas belum dapat dimulai apabila aktivitas lainnya belum selesai.



Jaringan PERT

- Hubungan dari semua aktivitas proyek dapat direpresentasikan dengan suatu jaringan dengan gambar lingkaran atau nodus dan anak panah.
 - **Anak panah** melambangkan **aktivitas**, dan
 - **Nodus** menggambarkan awal dan selesainya suatu aktivitas. Lingkaran atau nodus disebut dengan **kejadian** atau **peristiwa**.
 - **Ekor anak panah** melambangkan mulainya suatu aktivitas dan **kepala anak panah** melambangkan akhir suatu aktivitas.

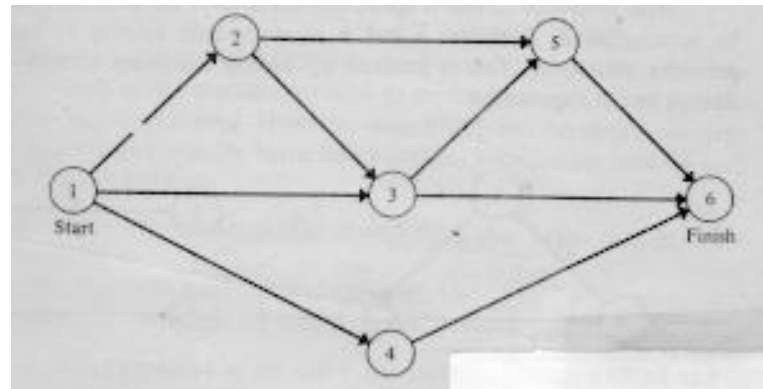


Jaringan PERT

Kejadian tidak memerlukan informasi waktu dan sumberdaya; kejadian ini hanya merupakan tonggak atau pertanda atau batas waktu yang menyatakan selesainya semua kegiatan dan mulainya kegiatan lainnya. Suatu kejadian dikatakan selesai apabila semua aktivitas yang mendahuluinya (dinotasikan dengan anak panah yang menuju ke lingkaran ini) telah selesai dikerjakan. Aktivitas yang berawal dari suatu kejadian tak dapat dimulai bilamana kejadian tersebut belum selesai. Aktivitas yang dimulai dari kejadian i dan berakhir pada kejadian j dinamakan dengan *aktivitas* (i,j) .



Jaringan PERT



Dalam gambar diatas, kejadian 1 menggambarkan awal sebuah proyek, dan kejadian 6 menggambarkan selesainya suatu proyek. Kejadian 3 tidak dapat dikatakan selesai sebelum aktivitas (1,3) dan (2,3) semuanya selesai. Juga aktivitas(3,6) tak dapat dimulai bilamana kejadian 3 belum selesai. Kejadian 6 dikatakan selesai, apabila aktivitas (5,6), (3,6) dan (4,6) semuanya selesai dikerjakan.



Jaringan PERT

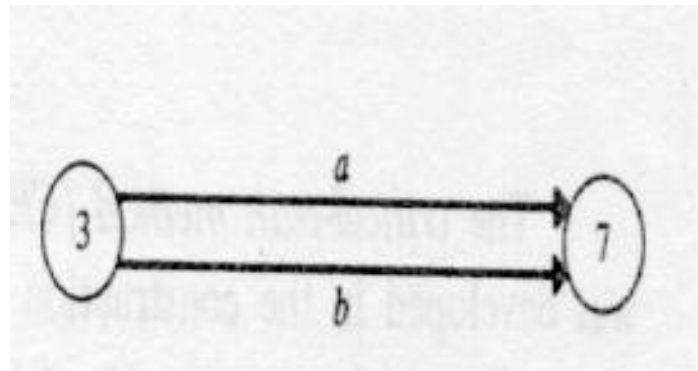
Petunjuk dan aturan untuk membangun jaringan yang menggambarkan hubungan antar aktivitas:

1. Kejadian 1 melambangkan awal suatu proyek. Semua aktivitas yang tidak diawali oleh aktivitas lainnya, harus diawali dengan kejadian 1 ini.
2. Kejadian M melambangkan akhir suatu proyek, dimana M adalah maksimum jumlah kejadian.
3. Aktivitas (i,j) dimulai dari kejadian i dan berakhir pada kejadian j .
4. Untuk setiap Aktivitas (i,j) , $i < j$.
5. Untuk j tertentu, semua aktivitas (i,j) harus diselesaikan terlebih dahulu sebelum kejadian j dikatakan selesai.
6. Setiap aktivitas (i,j) harus khas.



Jaringan PERT

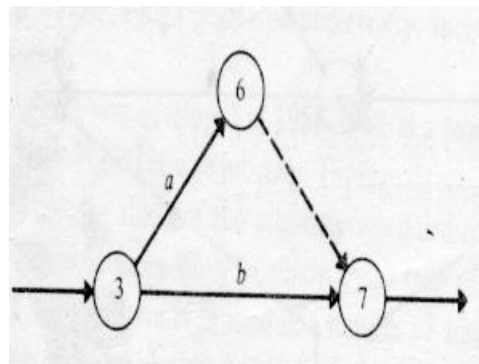
Implikasi dari aturan ke-6: Jika dua atau lebih aktivitas berawal dari kejadian i dan berakhir pada kejadian j , kejadian boneka (*dummy events*) dan aktivitas boneka dengan waktu nol perlu dibuat. Sebagai gambaran, misalkan dua aktivitas yang berbeda, a dan b , yang berawal dari kejadian 3 dan berakhir pada kejadian 7. Hal ini tak boleh digambarkan seperti pada gambar dibawah ini.





Jaringan PERT

Untuk itu diperlukan sebuah kejadian boneka 6 dan aktivitas boneka (6,7), seperti tertera pada gambar berikut

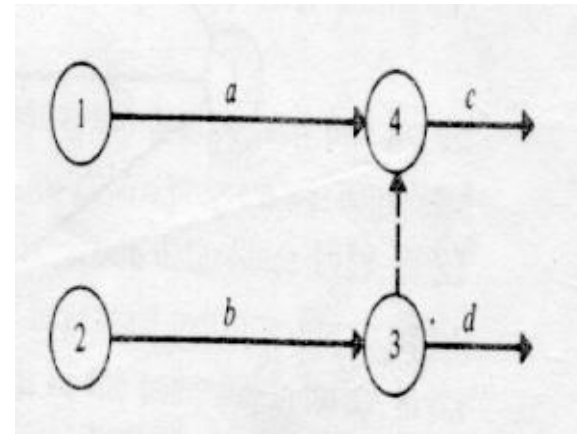


Garis putus-putus dari kejadian 6 ke kejadian 7 melambangkan aktivitas boneka. Kejadian boneka 6 melambangkan selesainya aktivitas *a* dan kejadian 7 melambangkan selesainya aktivitas baik *a* dan *b*.



Jaringan PERT

Gambaran lebih lanjut dengan aturan 6, misalkan aktivitas *a*, *b*, *c* dan *d* merupakan empat aktivitas yang harus diselesaikan. Aktivitas *a* dan *b* harus mendahului aktivitas *c*, tetapi hanya aktivitas *b* yang mendahului aktivitas *d*. Hal tersebut dapat dilakukan dengan cara menambah aktivitas boneka yang ditunjukkan dengan garis terputus seperti ilustrasi di bawah ini.





Estimasi Waktu Aktivitas (ET)

- Estimasi waktu untuk tiap aktivitas dalam jaringan PERT harus diberikan sebelum jaringan tersebut merupakan alat perencanaan dan pengkoordinasian yang bermanfaat.
 - a = waktu optimis yaitu waktu yang diharapkan jika segala sesuatu berjalan lebih baik tanpa adanya penundaan.
 - m = waktu yang sangat mungkin yaitu waktu yang paling realistis untuk menyelesaikan aktivitas tersebut.
 - b = waktu pesimis yaitu waktu yang diperkirakan hanya jika segala sesuatunya berjalan dengan tidak semestinya.

$$ET = \frac{a + 4m + b}{6}$$

$$\sigma_{ET}^2 = \left(\frac{b - a}{6} \right)^2$$

Harapan Waktu Penyelesaian Kejadian Tercepat (TE)



$ET(I,J)$ = rata-rata waktu penyelesaian aktivitas(I,J)

$TE(J)$ = harapan waktu penyelesaian kejadian tercepat kejadian J

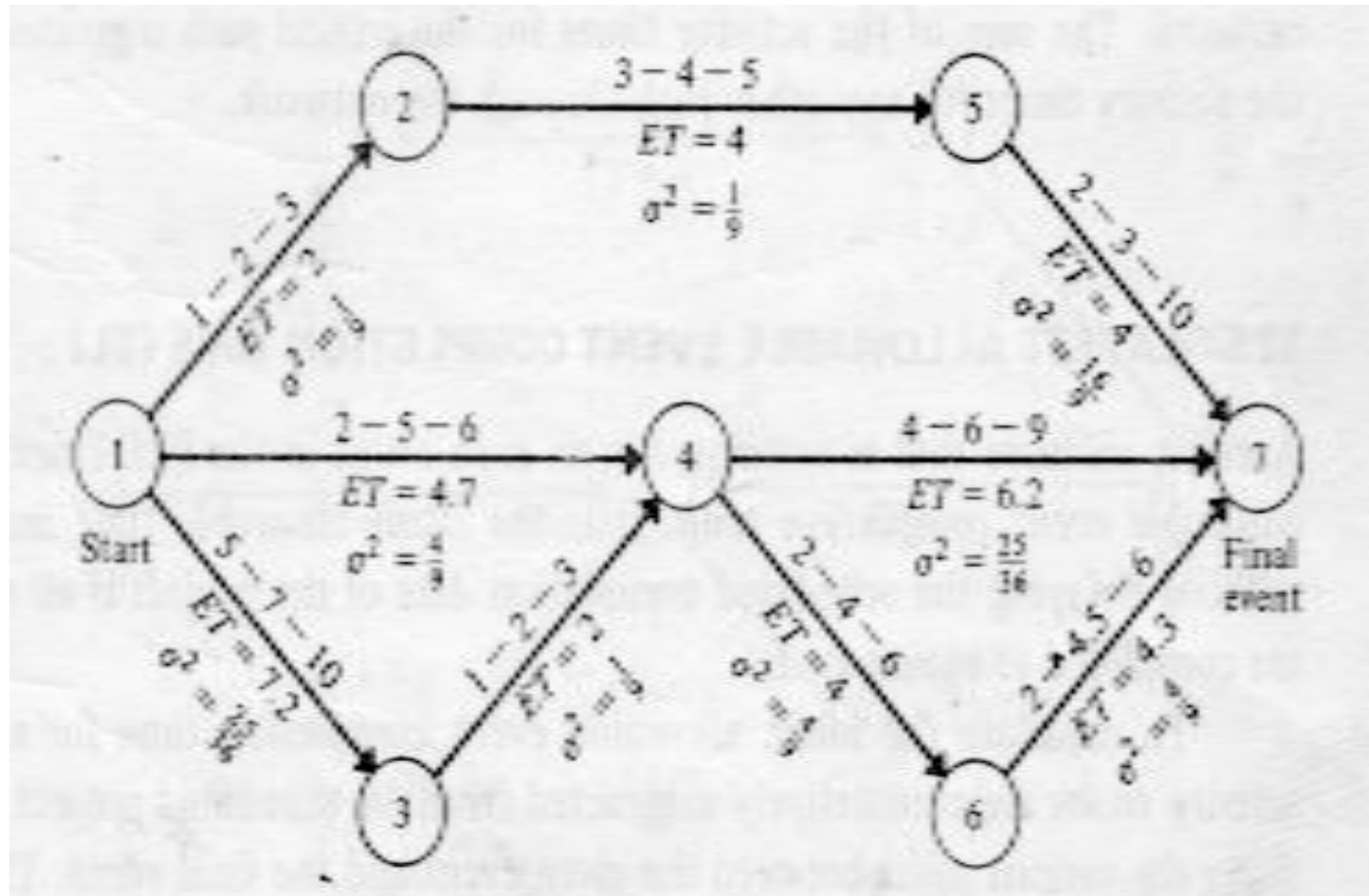
Untuk sebuah nilai J tertentu, sebut saja J^* , maka $TE(J^*)$ diberikan oleh formula

$$TE(J^*) = \max_I [TE(I) + ET(I, J^*)]$$

dimana fungsi dievaluasi untuk semua I dimana aktivitas dalam bentuk (I, J^*) .



Teladan Menghitung TE





Teladan Menghitung TE

$$TE(1) = 0$$

$$TE(2) = TE(1) + ET(1,2) = 0+2 = 2$$

$$TE(3) = TE(1) + ET(1,3) = 0+7,2 = 7,2$$

$$TE(4) = \max \left\{ \begin{array}{l} TE(1) + ET(1,4) \\ TE(3) + ET(3,4) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0 + 4,7 \\ 7,2 + 2 \end{array} \right\} = 9,2$$

$$TE(5) = TE(2) + ET(2,5) = 2+4 = 6$$

$$TE(6) = TE(4) + ET(4,6) = 9,2+4 = 13,2$$

$$TE(7) = \max \left\{ \begin{array}{l} TE(5) + ET(5,7) \\ TE(4) + ET(4,7) \\ TE(6) + ET(6,7) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{l} 6 + 4 \\ 9,2 + 6,2 \\ 13,2 + 4,3 \end{array} \right\} = 17,5$$

Nilai TE untuk tiap kejadian menunjukkan waktu tercepat dari tiap kejadian yang dapat diselesaikan jika setiap aktivitas J pada setiap jalur sebelum kejadian tertentu diselesaikan dalam tepat ET(J) satuan waktu. Jalur yang diikuti untuk menghitung nilai TE untuk kejadian terakhir disebut sebagai **jalur kritis jaringan**. Jumlah waktu aktivitas untuk jalur kritis lebih besar dari jumlah waktu aktivitas untuk sembarang jalur yang ada dalam jaringan.

Waktu Penyelesaian Kejadian Terlama Yang Diperbolehkan (TL)



Merupakan waktu terlama yang masih diperbolehkan sebuah kejadian dapat muncul tanpa menunda waktu penyelesaian proyek bilamana semua kejadian yang mendahului selesai seperti yang diharapkan.

$TL(I)$ = waktu penyelesaian kejadian terlama yang diperbolehkan untuk kejadian I
maka untuk nilai I tertentu, katakanlah I^* , maka

$$TL(I^*) = \min_J [TL(J) - ET(I^*, J)]$$



Teladan Menghitung TL

Dengan demikian, untuk M kejadian, persamaan diatas merupakan persamaan rekursif dimana kita dapat memulai menghitung TL(M) kemudian TL(M-1), TL(M-2), hingga TL(1). Waktu penyelesaian terlama yang diperbolehkan untuk kejadian terakhir sama dengan waktu penyelesaian tercepatnya. Namun demikian, TL(M) umumnya merupakan waktu penyelesaian terjadwal dari suatu proyek (SD).

Nilai TL pada gambar berikut dihitung sebagai berikut:

$$TL(7) = TE(7) = 17,5$$

$$TL(6) = TL(7) - ET(6,7) = 17,5 - 4,3 = 13,2$$

$$TL(5) = TL(7) - ET(5,7) = 17,5 - 4,0 = 13,5$$

$$TL(4) = \min\{[TL(7)-ET(4,7)],[TL(6)-ET(4,6)]\} = \min\{(17,5-6,2),(13,2-4,0)\} = 9,2$$

$$TL(3) = TL(4) - ET(3,4) = 9,2 - 2,0 = 7,2$$

$$TL(2) = TL(5) - ET(2,5) = 13,5 - 4,0 = 9,5$$

$$TL(1) = \min\{[TL(2)-ET(1,2)],[TL(3)-ET(1,3)],[TL(4)-ET(1,4)]\} \\ = \min\{[9,2-2,0],[7,2-7,2],[9,2-4,7]\} = 0$$

Waktu Longgar Kejadian (*Event Slack Time*)



Waktu longgar kejadian atau *Event Slack Time* untuk tiap kejadian adalah lamanya waktu suatu kejadian dapat ditunda tanpa harus mempengaruhi waktu penyelesaian yang sudah dijadwalkan. Waktu longgar untuk kejadian J diberikan oleh

$$\mathbf{SE(J) = TL(J) - TE(J)}$$

Kejadian yang memiliki waktu longgar yang “sedikit” atau “kecil” dikatakan kejadian “kritis” dan harus diperhatikan dalam artian dimonitor secara hati-hati. Untuk menolong waktu longgar suatu kejadian yang “kecil”, sumberdaya dapat dipindahkan dari aktivitas yang mendahuluinya yang memiliki waktu longgar lebih besar ke aktivitas yang mempengaruhi TE untuk kejadian yang memiliki waktu longgar “kecil”.



Jalur Kritis

Jalur terpanjang melalui suatu jaringan PERT disebut sebagai jalur kritis. Ini merupakan jalur yang diikuti untuk memperoleh nilai TE kejadian terakhir.

$$\mathbf{SE(M) = TL(M) - TE(M) = SD(M) - TE(M)}$$

SE dapat bernilai positif, negatif atau nol. Bila positif, berarti proyek selesai lebih dini daripada yang dijadwalkan, negatif bila lebih lambat, dan nol bila tepat waktu.



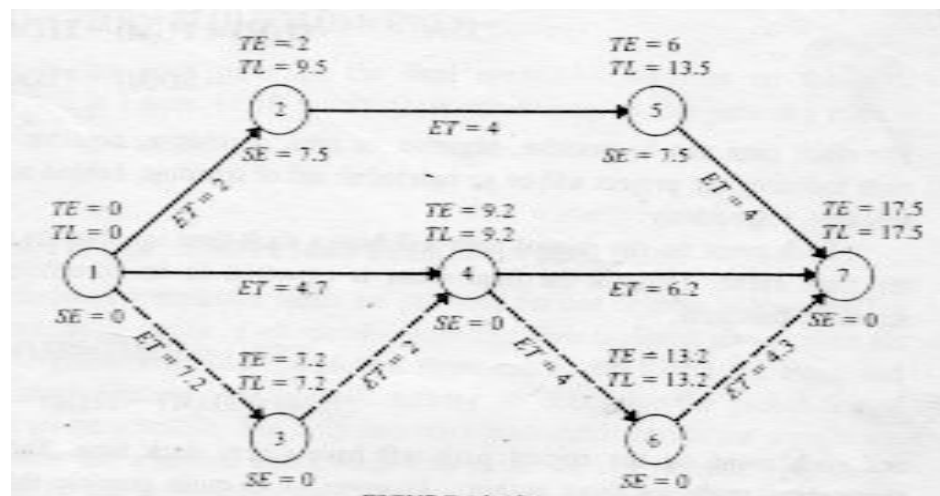
Jalur Kritis

Tiap kejadian pada jalur kritis akan memiliki waktu longgar yang sama besarnya dengan waktu longgar pada kejadian terakhir. Dengan demikian, apabila kejadian terakhir diharapkan dapat diselesaikan tepat waktu, maka

$$TE(M) = SD(M) = TL(M) \text{ maka}$$

$$SE(M) = TL(M) - TE(M) = 0$$

dan tiap kejadian pada jalur kritis akan memiliki waktu longgar yang bernilai nol. Hal ini yang biasa dipakai sebagai asumsi.



Peluang Penyelesaian Kejadian Sesuai Jadwal



Waktu penyelesaian sesuai jadwal hampir diartikan sebagai waktu penyelesaian kejadian terakhir. Rataan dan ragam waktu penyelesaian untuk tiap aktivitas untuk menentukan peluang penyelesaian kejadian sesuai jadwal. Asumsi yang diperlukan hanyalah waktu penyelesaian tiap kejadian memiliki sebaran normal dengan rataian TE dan ragam σ_{TE}^2 , dimana σ_{TE}^2 merupakan jumlah ragam waktu kegiatan pada jalur yang digunakan untuk menghitung TE. Sebagai contoh

$$\begin{aligned} TE(4) &= ET(1,3) + ET(3,4) \\ &= 7,2 + 2,0 \\ &= 9,2 \end{aligned}$$

dengan demikian $\sigma_{TE(4)}^2 = \sigma_{(1,3)}^2 + \sigma_{(3,4)}^2 = \frac{25}{36} + \frac{1}{9} = \frac{29}{36}$

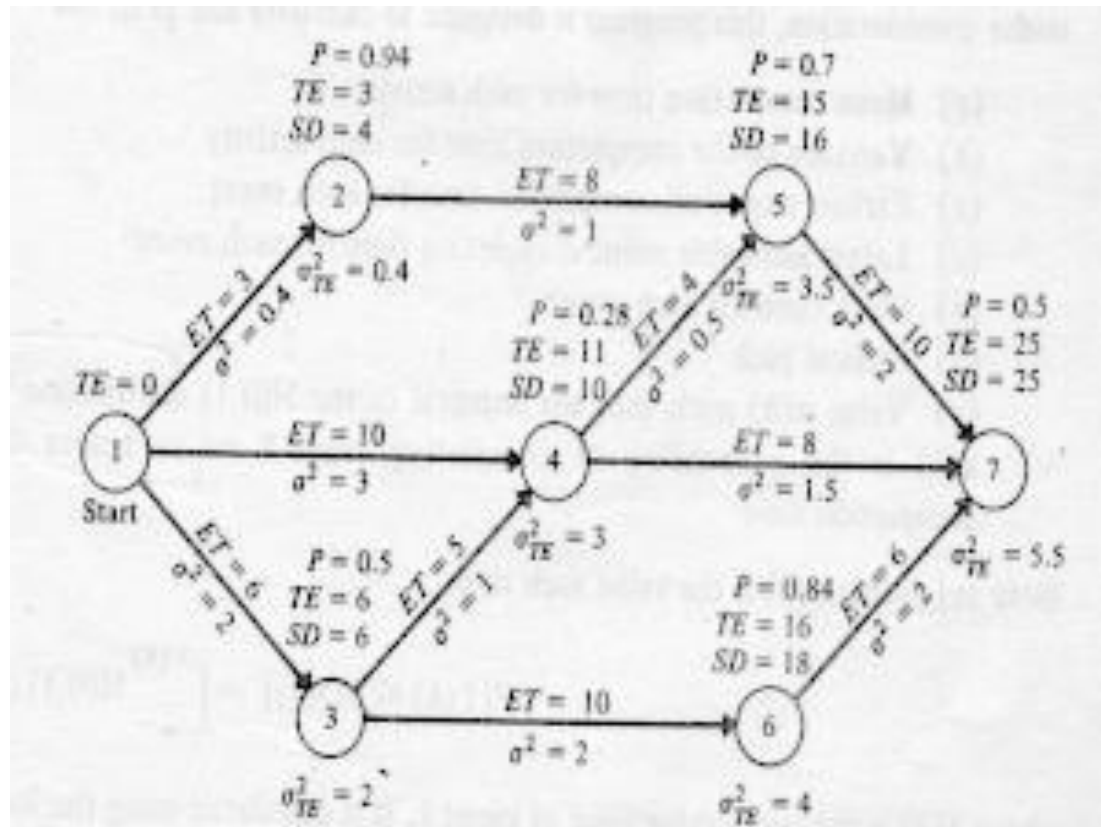
Peluang Penyelesaian Kejadian Sesuai Jadwal



$$T \xrightarrow{D} N(TE, \sigma_{TE}^2)$$

$$P(T \leq SD) = \int_{-\infty}^{SD} N(TE, \sigma_{TE}^2) dt = \int_{-\infty}^{\frac{SD-TE}{\sigma_{TE}}} N(0,1) dt$$

Teladan Peluang Penyelesaian Kejadian Sesuai Jadwal



Teladan Peluang Penyelesaian Kejadian Sesuai Jadwal



Estimasi	Aktivitas									
	1→2	1→3	1→4	2→5	3→4	3→6	4→5	4→7	5→7	6→7
<i>a</i>	2,20	1,51	5,00	6,00	2,00	5,51	1,76	4,00	5,00	2,51
<i>m</i>	2,45	6,12	9,90	7,50	5,00	10,21	4,06	8,16	10,38	5,62
<i>b</i>	6,00	10,00	15,39	12,00	8,00	14,00	6,00	11,35	13,49	11,00

Teladan Peluang Penyelesaian Kejadian Sesuai Jadwal



Kejadian	TE	SD	σ_{TE}^2	$x = \frac{SD - TE}{\sigma_{TE}}$	$P(T \leq SD)$
2	3	4	0,4	+1,58	0,94
3	6	6	2,0	+0,00	0,50
4	11	10	3,0	-0,58	0,28
5	15	16	3,5	+0,53	0,70
6	16	18	4,0	+1,00	0,84
7	25	25	5,5	+0,00	0,50