PERBANDINGAN METODE KEMUNGKINAN MAKSIMUM DAN LINIERISASI LANGSUNG DALAM PENENTUAN PENDUGA PARAMETER PADA MODEL PROBIT DAN LOGIT

Filo Sopianti[1], Sigit Nugroho[2] dan Jose Rizal[2]

[1]Alumni Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

[2]Dosen Jurusan Matematika, Fakultas MIPA, Universitas Bengkulu

ABSTRACT

Probit and logit models are nonlinear model. The parameter estimation in the probit and logit models can be estimated using maximum likelihood method. These nonlinear models can be made into linear form of its parameter so that the models can be estimated using least square method. Maximum likelihood and least square estimators are to be compared to find the better one for a given data set. Some criteria used for this comparison are Mean Absolute Error (MAE), Root Mean Square Error (RMSE), Mean Absolute Percentage Error (MAPE), dan Root Mean Square Percentage Error (RMSPE). The result shows, given the data taken from a referance book, the maximum likelihood method is better than the least square method.

Keywords: Probit Model, Logit Model, Maximum Likelihood Method, Least Square Method

1. PENDAHULUAN

Variabel respon yang kategorik jika diolah kedalam model analisis regresi linier biasa (klasik) maka parameter penduga yang diperoleh kurang tepat, karena melanggar asumsi nilai sisa yang disebabkan oleh bentuk galat yang tidak normal, varian galat yang tidak tetap (*Heteroscedastic*), dan terbatasnya fungsi respon (Neter *et al.*, 2005). Untuk mendapatkan penduga parameter yang lebih tepat, data tersebut diolah kedalam Model Linier Tergeneralisasi (MLT) atau G*eneralized Linear Model* (GLM) yang mengasumsikan bahwa variabel respon berdistribusi secara bebas dalam keluarga eksponensial (Dobson *dalam* Tirta, 2004). G*eneralized Linear Model* (GLM) yang membahas variabel respon untuk data biner diantaranya model logit dan probit yang memiliki variabel respon berdistribusi Bernoulli.

Parameter yang terdapat pada model probit dan logit dapat diduga dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*) dan dengan cara linierisasi langsung yang kemudian diolah dengan menggunakan metode kuadrat terkecil (*least square*). Untuk mengetahui metode mana yang lebih baik dalam penentuan penduga parameter pada model probit dan logit, dilakukan perbandingan anatara metode kemungkinan maksimum (*maximum likelihood*) dan linierisasi langsung yang kemudian diolah dengan metode kuadrat terkecil (*least square*), sehingga diperoleh model yang mendekati data sebenarnya. Agar lebih terarah, variabel respon dibatasi hanya untuk veriabel dikotomus dengan satu variabel prediktor. Untuk lebih memahami konsep maka dilakukan simulasi data sebagai validasi dengan menggunakan data yang dibangkitkan dari program microsoft excel

2. LANDASAN TEORI

2.1 G*eneralized Linear Model* (GLM)

Kondisi lain di lapangan yang tidak dapat diatasi langsung oleh model linier biasa (klasik) adalah adanya kenyataan bahwa distribusi respon tidak harus normal. Kondisi ini dapat diatasi dengan menggunakan G*eneralized Linear Model* (GLM) atau Model Linier Tergeneralisasi (MLT), dengan asumsi (1) Variabel respon memiliki distribusi keluarga eksponensial, (2) Adanya komponen tetap yang disebut prediktor linier $\eta_i = \sum_{j=0}^{k} \beta_i x_{ij}$, (3) Hubungan antara rataan dengan prediktor linier ditunjukkan oleh fungsi $g(.)$ yang disebut fungsi hubungan atau *link-function* sedemikian hingga $g(\mu_i) = \eta_i$.

2.2 Model Probit

Nagler (1994) mengungkapkan, misalkan Y_i^* adalah variabel respon yang tak teramati. Variabel respon ini dipengaruhi oleh variabel prediktor sehingga persamaan Y_i^* dapat ditulis dalam bentuk

$$Y_i^* = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \qquad (1)$$

dengan $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ sebagai parameter regresi, $X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{ki}$ variabel prediktor regresi dengan $i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$, dan ε_i merupakan koefisien galat regresi yang diasumsikan berdistribusi normal $N(0,1)$. Y_i^* dapat diamati ketika melewati batas tertentu, misalkan

$Y_i = 1$ jika $Y_i^* > 0$

$Y_i = 0$ jika $Y_i^* \le 0$

untuk $Y_i = 1$ diperoleh,

$$\mathrm{P}[Y_i = 1] = 1 - F\left(-\left(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{1i} + \ldots + \beta_k X_{1i}\right)\right) \qquad (2)$$

Dimana $F\left(-\left(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki}\right)\right)$ merupakan fungsi distribusi kumulatif dari ε_i yang diasumsikan berdistribusi $N(0,1)$ sehingga persamaan di atas dapat ditulis dalam bentuk fungsi distribusi normal kumulatif dari ε_i (Φ) yang dirumuskan

$$P_i = \Phi\left(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki}\right) \qquad (3)$$

dengan menggunakan invers fungsi Φ (Φ^{-1}) maka persamaan (2) dapat dinyatakan dalam bentuk linier terhadap parameternya dengan persamaan

$$\Phi^{-1}(P_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} \qquad (4)$$

Persamaan (2) disebut model probit sedangkan persamaan (3) merupakan model probit yang berbentuk linier terhadap parameternya.

2.3 Model Logit

Model logit atau model regresi logistik mengikuti fungsi distribusi logistik yang mempunyai fungsi kepekatan peluangnya

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1 + e^{-x}\right)^2} \qquad (5)$$

dan fungsi distribusi kumulatif dirumuskan

$$F(x) = \left(1 + e^{-x}\right)^{-1} \qquad (6)$$

dengan mensubtitusikan persamaan (6) ke persamaan (2) diperoleh:

$$P_i = \frac{\exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)}{1 + \exp\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{k} \beta_j X_{ij}\right)} \qquad (7)$$

Jika persamaan (7) diambil nilai logaritma naturalnya maka akan menghasilkan bentuk linier terhadap parameternya, ditunjukkan dengan persamaan

$$\ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right)=\beta_0+\sum_{j=1}^{k}\beta_j X_{ij} \quad (8)$$

Persamaan (7) disebut model logit dan persamaan (8) merupakan model logit dalam bentuk linier terhadap parameternya.

2.4 Metode Kemungkinan Maksimum

Metode kemungkinan maksimum menggunakan pendekatan distribusi. Dari data yang dimiliki serta asumsi distribusi yang diberlakukan pada data tersebut, maka dapat diperoleh fungsi likelihood dari data tersebut. Dari fungsi likelihoodnya ditentukan penduga maksimum likelihood untuk β yaitu nilai β yang memaksimumkan *L*.

2.5 Metode Kuadrat Terkecil

Menurut Tirta (2006), pada dasarnya parameter yang akan diduga dengan metode kuadrat terkecil adalah parameter dari garis regresi pada model yang mewakili populasi. Pendugaan ini diperoleh berdasarkan informasi distribusi sampel yang dimiliki. Metode kuadrat terkecil menggunakan pendekatan geometris, dimana secara geometris garis yang paling mewakili distribusi sampel adalah garis yang mempunyai simpangan minimum atau galat terkecil dengan pencaran data. Simpangan minimum diperoleh dengan mencari minimum bentuk kuadrat kesalahan.

2.6 Ukuran Kesalahan Model

Ukuran baik buruknya suatu model dapat dinilai dari kesalahannya (error). Menurut Fomby (2006), ukuran kesalahan model yang umum digunakan adalah *Mean Absolute Error* (MAE), *Root Mean Square Error* (RMSE), *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), dan *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE).

3. Penggunaan Metode Kemungkinan Maksimum dan Kuadrat Terkecil dalam Penentuan Penduga Parameter pada Model Probit dan Logit

3.1 Model Probit

3.1.1 Pendugaan Dengan Metode Kemungkinan Maksimum

Jika peubah acak $R_i \sim Binomial(n_i, P_i)$ dengan fungsi kepekatan peluang

$$f(r_i)=\binom{n_i}{r_i}P_i^{r_i}(1-P_i)^{n_i-r_i}$$

n_i adalah banyaknya satuan percobaan pada x_i, r_i melambangkan banyaknya satuan yang merespon, dimana $r_i=1,2,3,...,n_i$ dengan $i=1,2,3,...,k$, maka dapat ditentukan fungsi logaritma natural dari fungsi likelihood gabungannya yaitu:

$$l=\sum_{i=1}^{k}\ln\binom{n_i}{r_i}+\sum_{i=1}^{k}r_i\ln P_i+\sum_{i=1}^{k}(n_i-r_i)\ln(1-P_i) \quad (9)$$

Selanjutnya memaksimumkan l dengan cara menurunkan l terhadap parameter yang akan diduga yaitu β_0 dan β_1.

Misalkan $p_i=\frac{r_i}{n_i}$ maka diperoleh:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\frac{p_i - P_i}{P_i Q_i} \right) \frac{\partial P_i}{\partial \beta_0} \tag{10}$$

Dan

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\frac{p_i - P_i}{P_i Q_i} \right) \frac{\partial P_i}{\partial \beta_1} \tag{11}$$

dengan

$\frac{\partial P_i}{\partial \beta_0} = \phi\left(\beta_0 + \beta_1 X_i\right)$ dan $\frac{\partial P_i}{\partial \beta_1} = X_i \;\; \phi\left(\beta_0 + \beta_1 X_i\right)$

Menentukan nilai maksimum untuk persamaan (10) dan (11) tidak dapat dilakukan secara analitik, diperlukan bantuan metode numerik yang berupa metode iterasi. Dari persamaan kemungkinan maksimumnya diperoleh skema iterasi yaitu:

$$\begin{bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} n_i W_{i0} & \sum_{i=1}^{k} n_i X_i W_{i0} \\ \sum_{i=1}^{k} n_i X_i W_{i0} & \sum_{i=1}^{k} n_i W_{i0} X_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{k} n_i W_{i0}\left(\zeta_i - \hat{\zeta}_{i0}\right) \\ \sum_{i=1}^{k} n_i X_i W_{i0}\left(\zeta_i - \hat{\zeta}_{i0}\right) \end{bmatrix} \tag{12}$$

Setelah diperoleh nilai Δa dan Δb iterasi dapat diulang dengan menjumlahkan penduga awal dengan pertambahan penduganya yang dirumuskan dengan $a_i = a_{i-1} + \Delta a$ dan $b_i = b_{i-1} + \Delta b$. Iterasi diulang hingga tercapai kriteria konvergensi maksimum yaitu pada saat $\left|a_i - a_{i-1}\right|$ dan $\left|b_i - b_{i-1}\right|$ kurang dari suatu bilangan positif yang sangat kecil.

3.1.2 Pendugaan Dengan Metode Kuadrat Terkecil

Dari persamaan model probit linier terhadap parameternya diperoleh,

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(\Phi^{-1}\left(P_i\right) - a - bX_i \right)^2 \tag{13}$$

dengan $\sum_{i=1}^{k} e_i^2 = Q$, a dan b merupakan penduga parameter bagi β_0 dan β_1. Selanjutnya meminimumkan Q, dengan cara menurunkan persamaan (13) terhadap parameter penduga β_0 dan β_1 dan menyamakannya dengan nol, sehingga diperoleh:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{k} \Phi^{-1}\left(P_i\right) \sum_{i=1}^{k} X_i^2 - \sum_{i=1}^{k} X_i \sum_{i=1}^{k} \Phi^{-1}\left(P_i\right) X_i}{n \sum_{i=1}^{k} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} X_i \right)^2} \tag{14}$$

Dan

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^{k} \Phi^{-1}\left(P_i\right) X_i - \sum_{i=1}^{k} \Phi^{-1}\left(P_i\right) \sum_{i=1}^{k} X_i}{n \sum_{i=1}^{k} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{k} X_i \right)^2} \tag{15}$$

3.2 Model Logit

Menentukan penduga pada model logit sama langkahnya seperti pada model Probit. Dari persamaan logaritma natural gabungan fungsi likelihoodnya, dapat ditentukan turunan l terhadap β_0 dan β_1 yaitu:

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_0}=\sum_{i=1}^{k} n_i\left(p_i-P_i\right) \text{dan} \frac{\partial l}{\partial \beta_1}=\sum_{i=1}^{k} n_i X_i\left(p_i-P_i\right)$$

Dari persamaan (9) diketahui $\sum r_i$ dan $\sum r_i X_i$ merupakan statistik cukup minimal bersama (*jointly minimal sufficient statistic*) untuk (β_0,β_1). Berkson (1957) telah menyarankan sebuah metode iterasi untuk menentukan β_0 dan β_1 dari persamaan kemungkinan di atas. (Govindarajulu, 1988). Dari persamaan kemungkinan maksimum diperoleh matriks iterasi yang ditunjukkan dengan persamaan

$$\begin{bmatrix}\Delta a\\ \Delta b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{k} n_i\hat{P}_i\hat{Q}_i & \sum_{i=1}^{k} n_i X_i\hat{P}_i\hat{Q}_i\\ \sum_{i=1}^{k} n_i X_i\hat{P}_i\hat{Q}_i & \sum_{i=1}^{k} n_i X_i^2\hat{P}_i\hat{Q}_i\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(p_i-\hat{P}_{0i}\right)\\ \sum_{i=1}^{k} n_i X_i\left(p_i-\hat{P}_{0i}\right)\end{bmatrix} \tag{16}$$

Setelah diperoleh nilai Δa dan Δb iterasi dapat diulang dengan menjumlahkan penduga awal dengan pertambahan penduganya yang dirumuskan dengan $a_i = a_{i-1}+\Delta a$ dan $b_i = b_{i-1}+\Delta b$. Iterasi diulang hingga tercapai kriteria konvergensi maksimum yaitu pada saat $\left|a_i-a_{i-1}\right|$ dan $\left|b_i-b_{i-1}\right|$ kurang dari suatu bilangan positif yang sangat kecil.

3.1.3 Pendugaan Dengan Metode Kuadrat Terkecil

Menentukan penduga dengan menggunakan metode kuadrat terkecil pada model logit sama halnya dengan model probit. Dari model logit yang linier terhadap parameternya dapat ditentukan Q dengan persamaan

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\Big(T\left(P_i\right)-a-bX_i\Big)^2 \tag{17}$$

dimana $T\left(P_i\right)=\ln\left(\frac{P_i}{1-P_i}\right)=\beta_0+\beta_1 X_i$.

Selanjutnya yang diinginkan adalah mencari minimum Q dengan cara menurunkan persamaan (17) terhadap parameter penduga β_0 dan β_1 dan menyamakannya dengan nol, sehingga diperoleh penduga a dan b dengan persamaan

$$a=\frac{\sum_{i=1}^{k} T\left(P_i\right)\sum_{i=1}^{k} X_i^2-\sum_{i=1}^{k} X_i\sum_{i=1}^{k} T\left(P_i\right)X_i}{n\sum_{i=1}^{k} X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2}$$

dan

$$b=\frac{n\sum_{i=1}^{k} T\left(P_i\right)X_i-\sum_{i=1}^{k} T\left(P_i\right)\sum_{i=1}^{k} X_i}{n\sum_{i=1}^{k} X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right)^2}$$

4. Hasil dan Pembahasan

Dalam menggunakan metode iterasi diperlukan nilai awal. Dilakukan tiga pengujian nilai awal, nilai awal melalui titik ujung, melalui titik tengah dan melalui titik balik. Ternyata dari ketiga titik pengujian diperoleh jumlah iterasi yang sama, ini menunjukkan tidak terjadinya perbedaan yang signifikan.

Dengan menggunakan nilai awal yang melalui titik ujung dan persamaan iterasi, dari data yang dibangkitkan diperoleh model penduga untuk model probit sebagai berikut:

a. Dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum

$$\hat{P}_i = \Phi(-3,330 + 0,971 X_i)$$

b. Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil

$$\hat{P}_i = \Phi(-3,521 + 1,031 X_i)$$

Dari model penduga di atas, diperoleh hasil ukuran kesalahan yang ditunjukkan dalam table1.

Sedangkan untuk model logit diperoleh model prnduga sebagai berikut:

a. Dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum

$$\hat{P}_i = \left[1 + \exp\left(6,442 - 1,388 X_i\right)\right]^{-1}$$

b. Dengan menggunakan metode kuadrat terkecil

$$\hat{P}_i = \left[1 + \exp\left(6,494 - 1,387 X_i\right)\right]^{-1}$$

Dari model penduga logit diatas, diperoleh hasil ukuran kesalahan untuk kedua metode yang ditunjukkan pada tabel (2).

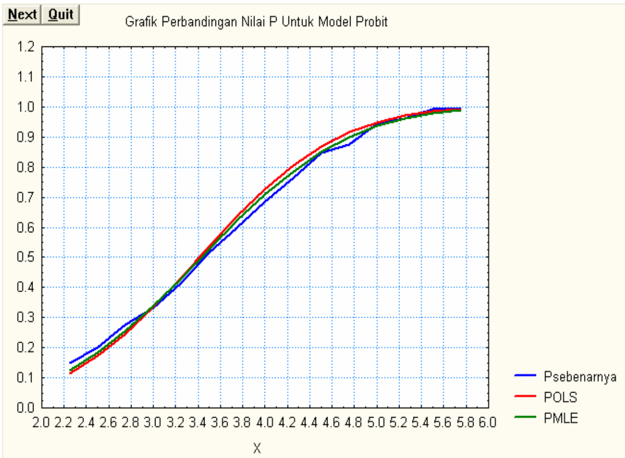
Tabel 1. Ukuran Kesalahan Model Probit Untuk Metode Kemungkinan Maksimum dan Metode Kuadrat Terkecil

Metode	RMSE	MAE	MAPE	RMSPE
Kemungkinan Maksimum	0.01753	0.01550	3.87582	0.5621
Kuadrat Terkecil	0.02688	0.02263	5.62897	0.832197

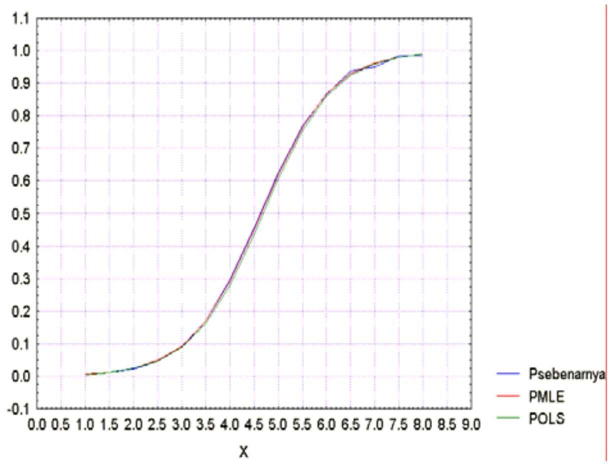
Tabel 2. Ukuran Kesalahan Model Logit Untuk Metode Kemungkinan Maksimum dan Metode Kuadrat Terkecil

Metode	RMSE	MAE	MAPE	RMSPE
Kemungkinan Maksimum	0.00533	0.00422	3.85306	0.64673
Kuadrat Terkecil	0.01015	0.00768	3.18412	0.43715

Tabel (1) dan (2) menunjukkan bahwa metode kemungkinan maksimum menghasilkan ukuran kesalahan model yang minimum. Ini menunjukkan bahwa penduga yang dihasilkan oleh metode iterasi kemungkinan maksimum lebih baik dari pada metode kuadrat terkecil karena dapat menghasilkan model yang medekati data sebenarnya. Hal ini dapat diperjelas dari bentuk grafiknya yang ditunjukkan pada gambar (1) dan (2).



Gambar 1. Grafik Perbandingan Nilai P Untuk Model Porbit



Gambar 2. Grafik Perbandingan Nilai P Untuk Model Logit

Dengan melihat ukuran kesalahan yang dihasilkan oleh metode kemungkinan maksimum dan metode kuadrat terkecil, dapat disimpulkan bahwa metode kemungkinan maksimum lebih baik dari metode kuadrat terkecil. Hal ini disebabkan karena metode kemungkinan maksimum menggunakan pendekatan metode numerik yang berupa iterasi untuk menentukan penduga, dimana setiap iterasi yang dihasilkan semakin mendekati data sebenarnya hingga tercapai konvergensi maksimum.

Sedangkan untuk metode kuadrat terkecil pendugaan dilakukan secara linier. Dari data yang ada diolah kebentuk model yang linier terhadap parameternya yaitu dengan cara menginverskan data respon sehingga diperoleh data baru, dari data baru ini selanjutnya dilakukan pendugaan. Penduga yang diperoleh dari data baru ini masih dalam bentuk data respon yang diinverskan bukan dalam data respon yang sebenarnya. Hal ini menyebabkan jarak antar respon yang diramalkan oleh model dengan respon sebenarnya menjadi semakin besar.

Setelah mengetahui bahwa metode kemungkinan maksimum lebih baik dari metode kuadrat terkecil, selanjutnya dibandingkan model probit dan logit dengan menggunakan data yang diambil dari pustaka. Dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum diperoleh model penduga:

a. Untuk Model Probit

$$\hat{P}_i = \Phi(-4.601 + 0.918X_i)$$

b. Untuk Model Logit

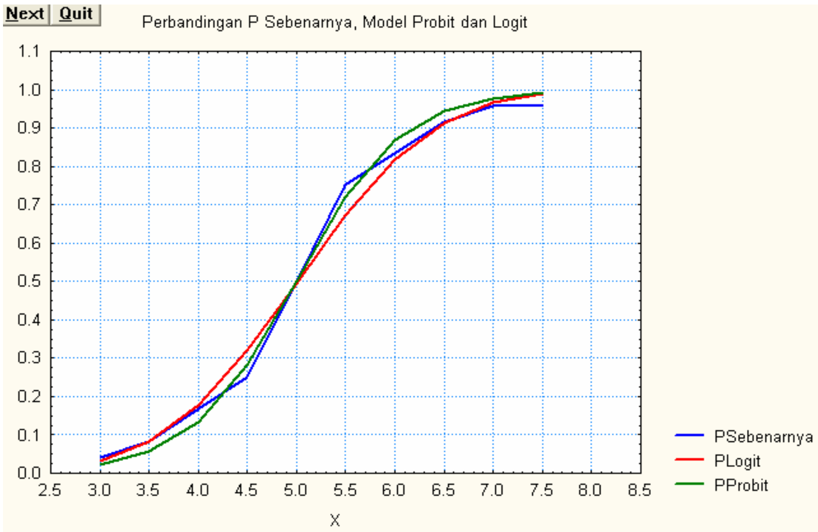
$$\hat{P}_i = \left[1 + \exp\left(9.357 - 1.873X_i\right)\right]^{-1}$$

Dari kedua model penduga di atas diperoleh hasil ukuran kesalahan model yang disajikan pada tabel 3.

Tabel 3. Hasil Ukuran Kesalahan Model Probit dan Model Logit

Model	RMSE	MAE	MAPE	RMSPE
Probit	0.0349	0.0227	7.4142	1.191196
Logit	0.0272	0.0255	12.5145	1.882775

Dari hasil ukuran kesalahan untuk kedua model, terlihat bahwa model logit memiliki RMSE yang lebih minimum dari model probit, tetapi untuk ukuran yang lain model probit lebih minimum. Ini menunjukkan bahwa kedua model memiliki kebaikan masing-masing sehingga tidak dapat disimpulkan model probit yang lebih unggul atau model logit yang lebih baik yang jelas kedua model dapat menggambarkan data untuk variabel respon yang berdistribusi tidak normal atau variabel respon yang binner hal ini dapat diperjelas dari gambar di bawah ini:



Gambar 3. Grafik Perbandingan Nilai *P* Sebenarnya,
P Model Probit, dan *P* Model Logit

5. Kesimpulan dan Saran

Dalam menentukan penduga parameter pada model probit dan logit, metode kemungkinan maksimum lebih baik dari metode kuadrat terkecil. Hal ini dilihat dari ukuran kesalahan model yang dihasilkan dari kedua metode. Ukuran kesalahan tersebut adalah *Mean Absolute Error* (MAE), *Root Mean Square Error* (RMSE), *Mean Absolute Percentage Error* (MAPE), dan *Root Mean Square Percentage Error* (RMSPE).
Selanjutnya penelitian dapat dilanjutkan untuk variable respon yang lebih dari dua kategori dan dengan menggunakan metode pendugaan yang lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Abdi, H. 2003. *Least Squares*. http://www.utdallas.edu/~herve/Abdi-PLS-pretty.pdf
Agresti, A. 2007. *An Introduction to Categorical Data Analysis*. John Wiley and Sons. New York
Cramer, J.S. 2003. *Logit Model From Economics and Other Fields*. Cambridge University Press. New York
Fomby, T. 2008. *Scoring Measures for Prediction Problems*. http://faculty.smu.edu/tfomby/eco5385/lecture/Scoring%20Measures%20for%20Prediction%20Problems.pdf
Govindarajulu, Z. 1988. *Statistical Techniques in Bioassay*. Karger. New York
Myung, I. J. 2001. *Maximum Likelihood Estimation*. http://quantrm2.psy.ohio-state.edu/injae/mle-pub.pdf
Nagler, J. 1994. *Interpreting Probit Analysis*. http://www.nyu.edu/clases/nagler/quant2/notes/probit1.pdf

Nengsi, Y.A. 2006. *Dekomposisi Komponen-komponen Deret Waktu Untuk Peramalan Jumlah Kedatangan Tamu Asing Ke Indonesia*. Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Bengkulu. Bengkulu

Neter, J., *et al*. 2005. *Applied Linear Statistical Models*. McGraw-Hill Companies. New York

Nugroho, S. 1995. *Teknik Statistik dalam Bioassay: Penggunaan Metode Kemungkinan Maksimum dalam Pendugaan Parameter*. Visi (2) Hal 86-99.

Power, A. D., and Yu Xie. 1999. *Statistical Methods for Categorical Data Analysis*. New York: Academic Press

Rusiman, M. S.,*et. al*. 2007. *Perbandingan Teori Model Binari (Comparisons of Theoritical Binary Models).* http://www.fs.utm.my/matematika/images/stories/matematika/2007/2316.pdf

Sanchez, A D. 1983. *Differential Equations: An Introduction*. Addison Weskey. California

Tirta, I. M. 2004. *Model Statistika Linier (Versi Elektronik)*. Jurusan Matematika Fakultas MIPA – Due Project Universitas Jember. Jember

Walpole, R. E. and R. H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuan*. ITB. Bandung

Yong, B. 2003. *Penaksiran Maksimum Likelihood Bagi Model Probit dan Model Probit Bivariat.*http://home.unpar.ac.id/~integral/Volume%208/integral%208%20No.%201/penaksiran%20maksimum%20likelihood.pdf