PENENTUAN KOEFISIEN ORTOGONAL POLINOMIAL PADA TARAF PERLAKUAN BERJARAK TAK SAMA

Endah Vivi Damayanti[1], Sigit Nugroho[2], dan Fachri Faisal[2]
1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu
2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRACT

Quantitative treatment level is used to see functional relationship between treatment levels and its responses. Since responses is a function of treatment levels only, it can be approximated using a polynomial function. This research aims to study polynomial orthogonal procedure for the unequally spaced quantitative treatment levels, to determine their polynomial orthogonal coefficient values. The result shows polynomial orthogonal coefficient values at unequally spaced quantitative treatment levels depends on their treatment levels.

Key words: *quantitative treatment level, polynomial orthogonal, unequally spaced.*

I. PENDAHULUAN

Percobaan merupakan serangkaian kegiatan dimana setiap tahap dalam rangkaian benar-benar terdefinisikan, dilakukan untuk menemukan jawaban tentang permasalahan yang diteliti melalui suatu pengujian hipotesis. Pola atau tata cara penerapan tindakan-tindakan (perlakuan) dalam suatu percobaan pada kondisi/lingkungan tertentu kemudian menjadi dasar penataan dan metode analisis statistik terhadap data hasilnya disebut *rancangan percobaan* (Hanafiah, 2003). Tujuan utama rancangan percobaan adalah untuk mengetahui taraf atau tingkat signifikan dari pengaruh taraf-taraf perlakuan.

Dalam rancangan percobaan, dengan taraf perlakuan bersifat kuantitatif, bertujuan untuk mengetahui hubungan fungsional antara variabel respon sebagai fungsi dari taraf-taraf suatu faktor atau perlakuan. Respon merupakan fungsi dari taraf-taraf perlakuan, sehingga bentuk fungsinya dapat didekati dengan fungsi polinomial. Metode ortogonal polinomial adalah sebuah metode yang digunakan untuk menentukan hubungan fungsional antara tanggapan (respon) dan perlakuan-perlakuan yang terlibat dalam kisaran taraf faktor penelitian yang dicoba. Tiap polinomial ortogonal akan membentuk suatu kontras sehingga dalam membuat hubungan fungsional tersebut harus diperhatikan masalah kontras.

Taraf perlakuan kuantitatif, dapat dibagi menjadi taraf perlakuan kuantitatif berjarak sama dan taraf perlakuan kuantitatif berjarak tak sama. Dalam suatu percobaan, terkadang peneliti dengan sengaja atau tanpa sengaja menggunakan taraf perlakuan berjarak tak sama dengan berbagai alasan seperti untuk menghemat biaya, menghemat waktu, mempermudah penelitian atau karena terjadinya data hilang. Untuk percobaan yang menggunakan taraf perlakuan berjarak sama, koefisien kontras telah disajikan dalam tabel oleh Little dan Hills. Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan yang akan dijawab dalam penelitian ini adalah bagaimana cara menentukan koefisien ortogonal polinomial pada taraf perlakuan barjarak tak sama.

II. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian studi literatur. Tahapan yang dilakukan dalam penelitian adalah:

1. Penentuan koefisien ortogonal polinomial pada taraf perlakuan yang berjarak tak sama untuk taraf perlakuan 3, 4, dan 5 dengan memperhatikan sifat-sifat kontras dan ortogonal.
2. Penentuan nilai-nilai koefisien ortogonal polinomial untuk taraf perlakuan berjarak tak sama dengan 3, 4, dan 5 taraf.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Ortogonal Polinomial

Metode ortogonal polinomial dapat diterapkan terhadap perlakuan-perlakuan yang bersifat kuantitatif seperti populasi tanaman, takaran pupuk atau konsentrasi pestisida. Pengujian menurut metode ortogonal polinomial dimaksudkan untuk menentukan hubungan fungsional antara tanggapan (respon) dan perlakuan-perlakuan yang terlibat dalam kisaran taraf faktor penelitian yang dicoba.

Secara umum, fungsi matematis yang tepat untuk menggambarkan hubungan numerik antara variabel respon sebagai fungsi dari taraf-taraf suatu faktor atau perlakuan tidak diketahui. Tetapi dapat didekati dengan suatu model polinomial:

$$y_i = a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2 + a_3 X_i^3 + \cdots + a_{t-1} X_i^{t-1} + \varepsilon_i \,,\; i = 1,2,...,t \qquad (1)$$

dimana x_i merupakan taraf-taraf faktor yang digunakan, y_i adalah respon yang diamati, dan ε_i komponen acak dari galat. Untuk sejumlah t taraf, derajat polinomialnya tidak dapat melebihi $(t-1)$.

Prosedur untuk menentukan koefisien ortogonal polinomial untuk percobaan dengan taraf perlakuan berjarak tak sama sangat kompleks, terutama apabila derajat polinomial besar akan sangat rumit. Sehingga untuk mempermudah pengerjaan, dalam skripsi ini hanya akan dibahas koefisien ortogonal polinomial untuk taraf perlakuan 3, 4, dan 5. Alasanya, karena dalam percobaan biologis khususnya pertanian, hampir tidak ada fenomena alam yang mempunyai bentuk hubungan fungsional hingga berderajat lebih dari 4. Bentuk kuadratik merupakan bentuk yang paling sering dijumpai.

Prosedur sederhana untuk ortogonal polinomial untuk taraf perlakuan berjarak tak sama dapat dilakukan sebagai berikut. Untuk sembarang gugus polinomial,

$$\begin{aligned} P_1 &= L_0 + L_1 x \\ P_2 &= Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2 \\ P_3 &= C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 \\ &\ldots \end{aligned} \qquad \mathbf{(2)}$$

Misalkan,

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_x (L_0 + L_1 x) Y_x \text{ adalah komponen linier}\\&\textstyle\sum_x (Q_0 + Q_1 x + Q_2 x^2) Y_x \text{ adalah komponen kuadratik}\\&\textstyle\sum_x (C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3) Y_x \text{ adalah komponen kubik}\\&\ldots\end{aligned} \quad \textbf{(3)}$$

Dimana L_0, L_1, Q_0, Q_1, … merupakan konstanta, x adalah taraf suatu faktor kuantitatif, Y_x adalah pengamatan respon bilamana faktor memiliki taraf x, dan penjumlahan dilakukan untuk seluruh kemungkinan nilai-nilai x.

Alternatif lain dari penulisan komponen linier, kuadratik, kubik dan seterusnya adalah sebagai berikut,

$$\begin{aligned}L_i &= a + X_i\\Q_i &= b + cX_i + X_i^2\\C_i &= d + eX_i + fX_i^2 + X_i^3\\&\ldots\end{aligned} \quad (4)$$

3.1.1. Faktor yang memiliki Tiga Taraf Perlakuan Kuantitatif

Penulisan komponen untuk 3 taraf kuantitatif ini adalah sebagai berikut. Misalkan terdapat sembarang gugus polinomial yang terdiri dari komponen linier dan komponen kuadratik sebagai berikut,

$$\begin{aligned}L_i &= a + X_i\\Q_i &= b + cX_i + X_i^2\end{aligned} \quad (5)$$

Dimana $a, b,$ dan c adalah sebarang konstanta. Dengan memperhatikan sifat-sifat kontras dan ortogonal, sehingga untuk faktor yang memiliki 3 taraf kuantitatif persyaratan berikut harus dipenuhi: $\sum_i L_i = 0$, $\sum_i Q_i = 0$, dan $\sum_i L_i Q_i = 0$.

a. $\sum_{i=1}^{t} L_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} L_i = at + \sum_{i=1}^{t} X_i \quad (6)$$

b. $\sum_{i=1}^{t} Q_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} Q_i = bt + c\sum_{i=1}^{t} X_i + \sum_{i=1}^{t} X_i^2 \quad (7)$$

c. $\sum_{i=1}^{t} L_i Q_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} L_i Q_i = abt + (ac + b)\sum_{i=1}^{t} X_i + (a + c)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + \sum_{i=1}^{t} X_i^3 \quad (8)$$

3.1.2. Faktor yang memiliki Empat Taraf Perlakuan Kuantitatif

Penulisan komponen untuk 4 taraf kuantitatif ini adalah sebagai berikut. Misalkan terdapat sembarang gugus polinomial yang terdiri dari komponen linier, komponen kuadratik dan komponen kubik sebagai berikut,

$$\begin{aligned} L_i &= a + X_i \\ Q_i &= b + cX_i + X_i^2 \\ C_i &= d + eX_i + fX_i^2 + X_i^3 \end{aligned} \tag{9}$$

Di mana nilai $a, b, c, d, e, \text{dan } f$ adalah sebarang konstanta. Dengan memperhatikan sifat-sifat kontras dan ortogonal, sehingga untuk faktor yang memiliki 4 taraf kuantitatif persyaratan berikut harus dipenuhi: $\sum_i L_i = 0$, $\sum_i Q_i = 0$, $\sum_i C_i = 0$, $\sum_i L_i Q_i = 0$, $\sum_i L_i C_i = 0$, dan $\sum_i Q_i C_i = 0$.

a. $\sum_{i=1}^{t} C_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} C_i = dt + e\sum_{i=1}^{t} X_i + f\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + \sum_{i=1}^{t} X_i^3 \tag{10}$$

b. $\sum_{i=1}^{t} L_i C_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} L_i C_i = adt + (ae + d)\sum_{i=1}^{t} X_i + (af + e)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (a + f)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + \sum_{i=1}^{t} X_i^4 \tag{11}$$

c. $\sum_{i=1}^{t} Q_i C_i = 0$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{t} Q_i C_i = bdt + (be + dc)\sum_{i=1}^{t} X_i + (bf + ce + d)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (b + cf + e)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 \\ + (c + f)\sum_{i=1}^{t} X_i^4 + \sum_{i=1}^{t} X_i^5 \end{aligned} \tag{12}$$

3.1.3. Faktor yang memiliki Lima Taraf Perlakuan Kuantitatif

Penulisan komponen untuk 5 taraf kuantitatif ini adalah sebagai berikut. Misalkan terdapat sembarang gugus polinomial yang terdiri dari komponen linier, komponen kuadratik, komponen kubik dan komponen kuartik sebagai berikut,

$$\begin{aligned} L_i &= a + X_i \\ Q_i &= b + cX_i + X_i^2 \\ C_i &= d + eX_i + fX_i^2 + X_i^3 \\ Ki &= g + hX_i + jX_i^2 + kX_i^3 + X_i^4 \end{aligned} \tag{13}$$

Dimana nilai $a, b, c, d, e, f, g, h, j, \text{dan } k$ adalah sebarang konstanta. Dengan memperhatikan sifat-sifat kontras dan ortogonal, sehingga untuk faktor yang memiliki 5 taraf kuantitatif persyaratan berikut harus dipenuhi: $\sum_i L_i = 0$, $\sum_i Q_i = 0$, $\sum_i C_i = 0$, $\sum_i K_i = 0$, $\sum_i L_i Q_i = 0$, $\sum_i L_i C_i = 0$, $\sum_i Q_i C_i = 0$, $\sum_i L_i K_i = 0$, $\sum_i Q_i K_i = 0$, dan $\sum_i C_i K_i = 0$.

a. $\sum_{i=1}^{t} K_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} K_i = gt + h\sum_{i=1}^{t} X_i + j\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + k\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + \sum_{i=1}^{t} X_i^4 \tag{14}$$

b. $\sum_{i=1}^{t} L_i K_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} L_i K_i = agt + (ah+g)\sum_{i=1}^{t} X_i + (aj+h)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (ak+j)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + (a+k)\sum_{i=1}^{t} X_i^4 + \sum_{i=1}^{t} X_i^5 \tag{15}$$

c. $\sum_{i=1}^{t} Q_i K_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} Q_i K_i = bgt + (bh+cg)\sum_{i=1}^{t} X_i + (bj+hc+g)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (bk+cj+h)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + (b+ck+j)\sum_{i=1}^{t} X_i^4 + (c+k)\sum_{i=1}^{t} X_i^5 + \sum_{i=1}^{t} X_i^6 \tag{16}$$

d. $\sum_{i=1}^{t} C_i K_i = 0$

$$\sum_{i=1}^{t} C_i K_i = dgt + (dh+eg)\sum_{i=1}^{t} X_i + (jd+eh+fg)\sum_{i=1}^{t} X_i^2 + (dk+ej+fh+g)\sum_{i=1}^{t} X_i^3 + (d+ek+fj+h)\sum_{i=1}^{t} X_i^4 + (e+fk+j)\sum_{i=1}^{t} X_i^5 + (f+k)\sum_{i=1}^{t} X_i^6 + \sum_{i=1}^{t} X_i^7 \tag{17}$$

3.2. Koefisien Ortogonal Polinomial

Misalkan dipilih 3 taraf perlakuan yang berjarak tak sama yaitu $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3,$ artinya nilai $t = 3$ sehingga untuk mendapatkan nilai koefisien ortogonal polinomial harus dipenuhi syarat kontras ortogonal yang telah dirumuskan sebelumnya. Dari hasil perhitungan didapat koefisien kontras sederhana untuk taraf perlakuan tersebut adalah seperti yang terdapat dalam tabel berikut:

Tabel 1. Koefisien Ortogonal Polinomial Sederhana untuk 3 Taraf

X_i	Linier	Kuadratik
0	-4	2
1	-1	-3
3	5	1

Untuk 4 taraf, misalkan dipilih 4 taraf perlakuan yang berjarak tak sama yaitu $X_1 = 0,\ X_2 = 1,\ X_3 = 2,\ X_4 = 4$ artinya nilai $t = 4$ sehingga untuk mendapatkan nilai koefisien ortogonal polinomial harus dipenuhi syarat kontras ortogonal yang telah dirumuskan sebelumnya. Dari hasil perhitungan didapat koefisien kontras sederhana untuk taraf perlakuan tersebut adalah seperti yang terdapat dalam tabel berikut

Tabel 2 Koefisien Ortogonal Polinomial Sederhana untuk 4 Taraf

X_i	Linier	Kuadratik	Kubik
0	-7	7	-3
1	-3	-4	8
2	1	-8	-6
4	9	5	1

Untuk 5 taraf, misalkan dipilih 5 taraf perlakuan yang berjarak tak sama yaitu $X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 2, X_4 = 3, \; X_5 = 5$ artinya nilai $t = 5$ sehingga untuk mendapatkan nilai koefisien ortogonal polinomial harus dipenuhi syarat kontras ortogonal yang telah dirumuskan sebelumnya. Dari hasil perhitungan didapat koefisien kontras sederhana untuk taraf perlakuan tersebut adalah seperti yang terdapat dalam tabel berikut

Tabel 3. Koefisien Ortogonal Polinomial Sederhana untuk 5 Taraf

X_i	Linier	Kuadratik	Kubik	Kuartik
0	-11	125	-38	4
1	-6	-26	63	-15
2	-1	-103	22	20
3	4	-106	-64	-10
5	14	110	17	1

IV. KESIMPULAN DAN SARAN

Dari hasil penelitian yang telah dilakukan disimpulkan adalah bahwa setiap taraf perlakuan yang berjarak tak sama memiliki beragam kemungkinan nilai koefisien ortogonal polinomial untuk masing-masing jarak taraf perlakuan. Nilai-nilai koefisien ortogonal polinomial yang dihasilkan akan sangat dipengaruhi oleh jarak antara masing-masing taraf perlakuan.

DAFTAR PUSTAKA

Gomez. K.A and A.A. Gomez. 1984. *Statistical Procedures for Agricultural Research*. 2nd ed. An International Rice Research Institute Book. John Wiley & Sons. Singapore.

Hanafiah, K.A. 2003. *Rancangan Percobaan Teori & Aplikasi*. Raja Grafindo Persada. Jakarta.

Hines, W and Montgomery, D.C. 1990. *Probabilita dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*. John Willey & Sons, Inc. Singapore

Lentner, M and Bishop, T. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valley Book Company.

Little, T.M and F.J. Hills. 1978. *Agricultural Experimentation Design and Analysis*. John Wiley and Sons. Singapore.
Nugroho, S. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan*. Unib Press. Bengkulu
Peng, K.C. 1967. *The Design and Analysis of Scientific Experiments. An Introduction with Some Emphasis on Computation*. Addison-Wesley Publishing Company.
Sudjana. 1989. *Desain dan Analisis Eksperimen*. Tarsito. Bandung.