Kajian Penentuan Fungsi Polinomial Dengan Metode Ortogonal Polinomial Untuk Taraf Kuantitatif Berjarak Sama

Winika Eka Widyastuti[1], Sigit Nugroho[2], dan Jose Rizal[2]

1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRACT

One reason of using quantitative level in design of experiments is to obtain formula or relationship between treatment levels and their responses in the form of polinomial function. This can be done using polynomial ortogonal method. In addition, the functional relationship can also be determined using regression analysis method. This research aims to determine polynomial function with polynomial ortogonal method and regression analysis method. The result shows that treatment having quantitative levels with 2, 3 and 4 treatment levels be concluded that polynomial ortogonal method can be used without having to analyse using regression analysis method again to get its function.

Keywords: Quantitative Treatment Level, Polynomial Ortogonal, Equally Spaced, Regression Analysis

1. Pendahuluan

Percobaan merupakan suatu tindakan atau kegiatan yang dilakukan secara seksama dalam rangka menentukan beberapa pengaruh yang tidak diketahui atau menguji suatu hipotesis. Dapat dikatakan suatu percobaan merupakan suatu penelaahan ilmiah terencana yang dirancang untuk meneliti satu atau lebih populasi (Nugroho, 2008).

Metode statistika yang berkaitan dengan pelaksanaan suatu percobaan disebut dengan Rancangan Percobaan. Model rancangan percobaan yang paling sederhana merupakan fungsi respon terhadap perlakuan. Respon disebut dengan variabel terikat atau variabel tak bebas (*dependent variable*), sedangkan perlakuan yang mempengaruhinya disebut variabel bebas (*independent variable*).

Jika H_0 ditolak pada suatu pengujian perlakuan, maka perlu dikaji lebih jauh tentang perlakuan tersebut. Pada pengaruh tetap, ada sedikitnya sepasang pengaruh perlakuan yang berbeda. Perlakuan yang mana yang memiliki pengaruh berbeda dapat ditentukan dengan taraf perlakuannya.

Pada umumnya penggunaan taraf perlakuan kuantitatif bertujuan untuk mencari formulasi atau rumus hubungan antara perlakuan dan respon sebagai fungsi dari taraf-taraf perlakuan dalam bentuk polinomial. Metode ortogonal polinomial digunakan dalam penentuan fungsi polinomial tersebut untuk taraf perlakuan berjarak sama.

Selain itu, penentuan fungsi polinomial juga dapat ditentukan dengan pendekatan persamaan dalam analisis regresi. Oleh karena itu, dalam penulisan skripsi ini akan dikaji penentuan fungsi dengan metode ortogonal polinomial yang selanjutnya dikaji dengan teknik analisis regresi.

2. Penentuan Fungsi Polinomial Untuk Taraf Kuantitatif Berjarak Sama

2.1 Penentuan Fungsi dengan Metode Ortogonal Polinomial

Banyak percobaan yang dirancang untuk menentukan sifat alamiah suatu kurva respon bila taraf perlakuan menunjukkan adanya peningkatan jumlah dari perlakuan tersebut (Nugroho, 2008). Dalam rancangan percobaan, penggunaan taraf perlakuan yang bersifat kuantitatif, seringkali bertujuan untuk mengetahui hubungan fungsional antara variabel terikat (respon) sebagai fungsi dari taraf-taraf suatu perlakuan. Pada umumnya, fungsi matematis yang tepat untuk menggambarkan hubungan tersebut tidak diketahui, tetapi dapat didekati dengan suatu model polinomial yaitu (Peng, 1967):

$$Y_i = a_0 + a_1 X_i + a_2 X_i^2 + a_3 X_i^3 + \cdots + a_{t-1} X_i^{t-1} + \varepsilon_i \quad \text{untuk} \quad i = 1, 2, \ldots, t \qquad (2\text{-}1)$$

dimana

Y_i = respon ke-i yang diamati

X_i = taraf-taraf perlakuan ke-i yang digunakan

ε_i = komponen acak dari galat (error)

Jika nilai-nilai X_i dan Y_i diberikan, maka koefisien-koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_{t-1}$ dapat diduga dengan menggunakan metode jumlah kuadrat galat terkecil. Jelas bahwa, untuk sejumlah t taraf, derajat polinomialnya tidak dapat melebihi $(t-1)$.

Dapat ditunjukkan bahwa persamaan diatas dapat dituliskan sebagai

$$Y_i = A_0 P_{0i} + A_1 P_{1i} + A_2 P_{2i} + \cdots + A_{t-1} P_{(t-1)i} + \varepsilon_i \quad \text{untuk } i = 1, 2, \cdots, t \qquad (2\text{-}2)$$

dimana $P_{0i} = 1$, P_{mi} adalah polinom berderajat m ($m = 1, 2, \cdots, t-1$) dalam X_i dan juga harus memenuhi persyaratan kontras dan ortogonal, yaitu :

$$\sum_{i=1}^{t} P_{mi} = 0, \quad \sum_{i=1}^{t} P_{mi} P_{m'i} = 0 \quad (m \neq m') \qquad (2\text{-}3)$$

yang harus berlaku pada gugus nilai X_i. Polinom P_m disebut dengan ortogonal polinomial. Menurut Nugroho (2008). Lima polinomial pertama untuk taraf kuantitatif berjarak sama, dapat diturunkan yaitu:

$$\begin{aligned}
P_{1i} &= \frac{X_i - \overline{X}}{d} \\
P_{2i} &= P_{1i}^2 - \frac{N^2 - 1}{12} \\
P_{3i} &= P_{1i}^3 - \frac{3N^2 - 7}{20} P_{1i} \\
P_{4i} &= P_{1i}^4 - \frac{3N^2 - 13}{14} P_{1i}^2 + \frac{3(N^2 - 1)(N^2 - 9)}{560} \\
P_{5i} &= P_{1i}^5 - \frac{5(N^2 - 7)}{18} P_{1i}^3 + \frac{15N^4 - 230N^2 + 407}{1008} P_{1i}
\end{aligned} \qquad (2\text{-}4)$$

dimana $\overline{X}$ adalah rata-rata X_i, P_{1i} adalah syarat pengkodean dan nilai P_{mi} kadang untuk kemudahan dilakukan penskalaan sedemikian rupa sehingga nilai-nilainya bilangan-bilangan bulat sekecil mungkin untuk semua X_i. Secara umum P_{mi} dapat dicari melalui relasi rekuren (*recurrent relation*) berikut (Peng, 1967):

$$P_{(m+1)i} = P_{1i} P_{mi} - \frac{m^2 \left(N^2 - m^2\right)}{4\left(4m^2 - 1\right)} P_{(m-1)i} \qquad (2\text{-}5)$$

Perhatikan bahwa jika $i = 1, 2, \ldots, N$ dengan N adalah banyaknya taraf perlakuan, maka untuk taraf perlakuan berjarak sama berlaku bahwa

- jika $X_i = i$ artinya jarak antar perlakuan d adalah 1, berlaku $P_{1i} = X_i - \overline{X}$ dan
$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i = \frac{N+1}{2}$$
- Jika $x_i \neq i$ dan $d \neq 1$, maka berlaku $P_{1i} = \frac{X_i - \overline{X}}{d}$ dan $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$.

Koefisien-koefisien $A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}$ pada persamaan (2-2) dapat diperoleh dengan menggunakan metode jumlah kuadrat galat terkecil, yaitu nilai-nilai $A_0, A_1, \ldots, A_{t-1}$ dipilih sedemikian rupa sehingga

$$\sum_{i=1}^{t} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{t}\left(Y_i - \left(A_0 P_{oi} + A_1 P_{1i} + A_2 P_{2i} + A_3 P_{3i} + \cdots + A_{t-1} P_{(t-1)i}\right)\right)^2 \quad (2\text{-}6)$$

minimum (Peng, 1967). Selanjutnya, persamaan (2-6) diturunkan terhadap A_m untuk $m = 0, 1, ..., t-1$, kemudian menyamakannya dengan nol. Dengan demikian, persamaan normal untuk menentukan A_m adalah

$$\begin{aligned}
A_0 \sum\nolimits_i P_{0i} P_{0i} + A_1 \sum\nolimits_i P_{0i} P_{1i} + \cdots + A_{t-1} \sum\nolimits_i P_{0i} P_{(t-1)i} &= \sum\nolimits_i Y_i P_{0i} \\
A_0 \sum\nolimits_i P_{1i} P_{0i} + A_1 \sum\nolimits_i P_{1i} P_{1i} + \cdots + A_{t-1} \sum\nolimits_i P_{1i} P_{(t-1)i} &= \sum\nolimits_i Y_i P_{1i} \\
A_0 \sum\nolimits_i P_{2i} P_{0i} + A_1 \sum\nolimits_i P_{2i} P_{1i} + \cdots + A_{t-1} \sum\nolimits_i P_{2i} P_{(t-1)i} &= \sum\nolimits_i Y_i P_{2i} \\
&\cdots \\
A_0 \sum\nolimits_i P_{(t-1)i} P_{0i} + A_1 \sum\nolimits_i P_{(t-1)i} P_{1i} + \cdots + A_{t-1} \sum\nolimits_i P_{(t-1)i} P_{(t-1)i} &= \sum\nolimits_i Y_i P_{(t-1)i}
\end{aligned} \quad (2\text{-}7)$$

Karena $P_{0i} = 1$ dan $\sum_{i=1}^{t} P_{mi} P_{m'i} = 0 \quad (m \neq m')$, maka jawab dari gugus persamaan (2-7) dapat dicari dengan cara sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
A_0 N &= \sum\nolimits_i Y_i \\
A_1 \sum\nolimits_i P_{1i}^2 &= \sum\nolimits_i Y_i P_{1i} \\
A_2 \sum\nolimits_i P_{2i}^2 &= \sum\nolimits_i Y_i P_{2i} \\
&\cdots \\
A_{t-1} \sum\nolimits_i P_{(t-1)i}^2 &= \sum\nolimits_i Y_i P_{(t-1)i}
\end{aligned}$$

Secara umum diperoleh,

$$A_m = \frac{\sum_i Y_i P_{mi}}{\sum_i P_{mi}^2}, \quad m = 0, 1, 2, ..., t-1 \quad (2\text{-}8)$$

Jika $Y_u^{'} = f(u, u^2, u^3, u^{N-1})$ merupakan persamaan polinomial dalam u, maka persamaan (2-2) dapat disajikan dalam bentuk koding seperti berikut (Hicks, 1982):

$$Y_u^{'} = A_0 \xi_0^{'} + A_1 \xi_1^{'} + \cdots + A_i \xi_i^{'}, \text{ untuk } i = 0, 1, 2, \cdots, N \quad (2\text{-}9)$$

dimana polinomial dalam bentuk koding yaitu:

$$\xi_0^{'} = 1$$
$$\xi_1^{'} = \lambda_1 u$$

$$\xi_2' = \lambda_2\left[u^2 - \frac{N^2-1}{12}\right] \tag{2-10}$$

$$\xi_3' = \lambda_3\left[u^3 - u\left(\frac{3N^2-7}{20}\right)\right]$$

$$\xi_4' = \lambda_4\left[u^4 - \frac{u^2}{14}\left(3N^2-13\right) + \frac{3}{560}\left(N^2-1\right)\left(N^2-9\right)\right]$$

$$\xi_5' = \lambda_5\left[u^5 - \frac{5u^3}{18}\left(N^2-7\right) + \frac{u}{1008}\left(15N^4-230N^2+407\right)\right]$$

dengan $u = \frac{\left(X-\overline{X}\right)}{d}$, N adalah banyaknya taraf suatu perlakuan, ξ_i' adalah polinom berderajat i. Koefisien polinomial A_i dapat ditentukan dengan rumus sebagai berikut:

$$A_i = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij}\xi_i'}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{r}\left(\xi_i'\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} Y_{i.}\xi_i'}{r\sum_{i=1}^{r}\left(\xi_i'\right)^2} = \frac{Kontras}{r\sum_{i=1}^{r}\left(\xi_i'\right)^2} \tag{2-11}$$

Pada pengkodingan, polinomial dikalikan dengan suatu pengali λ. Nilai λ dipilih sedemikian sehingga nilai polinomial tersebut adalah bilangan bulat untuk semua u (Hicks, 1982). Koefisien untuk polinomial dapat ditentukan berdasarkan tabel korfisien ortogonal polinomial pada tabel 1. Selanjutnya, substitusikan nilai-nilai polinomial dan koefisiennya kedalam persamaan (2-9) sesuai dengan jumlah taraf perlakuan, misalnya untuk 2 dan 3 taraf perlakuan bentuk fungsinya berturut-turut adalah $Y_u' = A_0\xi_0' + A_1\xi_1'$ dan $Y_u' = A_0\xi_0' + A_1\xi_1' + A_2\xi_2'$.

Untuk sejumlah N taraf perlakuan dengan r ulangan perlakuan yang sama, derajat polinomial tertingginya adalah $N-1$. Akan tetapi, fungsi polinomial untuk N hingga lebih dari 4 taraf perlakuan jarang ditemui. Untuk itu bila perlu, dilakukan pengujian derajat polinomial tertinggi yang paling nyata. Sehingga, bentuk fungsi polinomial dapat ditentukan.

Kontras Ortogonal Polinomial

Penduga respon dalam bentuk polinomial kemudian dapat dituliskan menjadi

$$\hat{Y}_i = \frac{\sum_i Y_i}{N} + \frac{\sum_i Y_i P_{1i}}{\sum_i P_{1i}^2}P_{1i} + \frac{\sum_i Y_i P_{2i}}{\sum_i P_{2i}^2}P_{2i} + \cdots + \frac{\sum_i Y_i P_{(t-1)i}}{\sum_i P_{(t-1)i}^2}P_{(t-1)i}$$

Karena P_{mi} ortogonal, setelah melalui beberapa penyederhanaan, maka jumlah kuadrat deviasi antara nilai respon sesungguhnya dan nilai dugaannya dapat ditentukan yaitu (Peng 1967)

$$\sum_i\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2 = \sum_i Y_i^2 - \frac{\left(\sum_i Y_i\right)^2}{N} - \frac{\left(\sum_i Y_i P_{1i}\right)^2}{\sum_i P_{1i}^2} - \frac{\left(\sum_i Y_i P_{2i}\right)^2}{\sum_i P_{2i}^2} - \cdots - \frac{\left(\sum_i Y_i P_{(t-1)i}\right)^2}{\sum_i P_{(t-1)i}^2} \tag{2-10}$$

Perlu diketahui bahwa tiap suku $\frac{\left(\sum_i Y_i P_{mi}\right)^2}{\sum_i P_{mi}^2}$ dalam persamaan (2-10) adalah jumlah kuadrat dari $\sum_i Y_i P_{mi}$ dengan derajat bebas 1 dan merupakan reduksi yang saling bebas dari polinom P_m. Besaran $\sum_i Y_i P_{1i}$, $\sum_i Y_i P_{2i}$, $\sum_i Y_i P_{3i}$, $\sum_i Y_i P_{4i}$, $\sum_i Y_i P_{5i}$, ... merupakan komponen linier, kuadratik, kubik, kuartik, kuintik, ... Jika polinom yang digunakan dalam pendugaan hingga derajat $(t-1)$, maka

$$\sum_i Y_i^2 - \frac{\left(\sum_i Y_i\right)^2}{N} = \frac{\left(\sum_i Y_i P_{1i}\right)^2}{\sum_i P_{1i}^2} + \frac{\left(\sum_i Y_i P_{2i}\right)^2}{\sum_i P_{2i}^2} + \cdots + \frac{\left(\sum_i Y_i P_{(t-1)i}\right)^2}{\sum_i P_{(t-1)i}^2} \tag{2-11}$$

Dalam analisis keragaman, biasanya rata-rata dari $Y_{i.}$ dihitung dari jumlah total T_i yang masing-masing dihitung dari sejumlah r pengamatan. Dengan demikian, $\sum_i Y_{i.} P_{mi}$ $(i = 1, 2, \ldots, t-1)$ membentuk suatu gugus kontras ortogonal yang lengkap. Jumlah kuadrat kontras $\sum_i Y_{i.} P_{mi}$ adalah

$$JK\left(\sum_i Y_{i.} P_{mi}\right) = \frac{\left(\sum_i T_i P_{mi}\right)^2}{r\sum_i P_{mi}^2} \tag{2-12}$$

Pengujian Kontras Ortogonal Polinomial

Derajat polinomial tertentu yang diperkirakan paling nyata untuk fungsi polinomial dapat ditentukan dengan pengujian derajat nyata untuk masing-masing kontras ortogonal polinomial menggunakan statistik uji yang dirumuskan sebagai berikut:

$$F = \frac{JK(kontras)/db\ kontras}{JK(galat)/db\ galat} \tag{2-13}$$

Dalam percobaan biologis khususnya pertanian, dapat dipahami bahwa hampir tidak ada fenomena alam yang mempunyai bentuk hubungan fungsional hingga berderajat lebih dari 4, bahkan mungkin lebih dari 3 atau 2. Oleh karena itu, bentuk kuadratik merupakan bentuk yang paling sering dijumpai.

Koefisien ortogonal polinomial untuk kasus-kasus taraf perlakuan kuantitatif berjarak sama hingga 5 taraf dapat disajikan pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Koefisien Ortogonal Polinomial Hingga Taraf Perlakuan 5

Jumlah Perlakuan	Derajat Polinom	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	$\sum_i (\xi'_i)^2$	λ
2	1	-1	+1				2	2
3	1	-1	0	+1			2	1
	2	+1	-2	+1			6	3
4	1	-3	-1	+1	+3		20	2
	2	+1	-1	-1	+1		4	1
	3	-1	+3	-3	+1		20	10/3
5	1	-2	-1	0	+1	+2	10	1
	2	+2	-1	-2	-1	+2	14	1
	3	-1	+2	0	-2	+1	10	5/6
	4	+1	-4	+6	-4	+1	70	35/12

2.2 Penentuan Fungsi dengan Teknik Analisis Regresi

Regresi linier berganda digunakan untuk mengambarkan hubungan antar dua atau lebih variabel bebas dengan satu variabel tak bebas dalam bentuk linier. Secara umum model regresi linier berganda dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + ... + \beta_j X_{ji} + \varepsilon_i \quad , \ i = 1, 2, ... , n \tag{2-14}$$

Dimana $Y_i =$ nilai pengamatan atau respon ke-i, $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_j =$ koefisien atau parameter-parameter regresi yang nilainya tidak diketahui, dan $\varepsilon_i =$ Komponen galat ke-i.

Dalam bentuk matriks persamaan (2-14) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\underline{Y} \quad = \underline{X}\,\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \tag{2-15}$$

dimana $\underline{Y}$ adalah vektor acak teramati berukuran $n \text{ x } 1$ yang tergantung pada peubah Y_i, $\underline{X}$ adalah matriks berukuran $n \text{ x } (j+1)$ dari sejumlah bilangan tetap yang teramati (elemen X bukan variabel acak), $\underline{\beta}$ adalah vektor parameter-parameter yang tidak teramati dan akan diduga berukuran $(j+1) \text{ x } 1$, dan $\underline{\varepsilon}$ adalah vektor acak yang teramati berukuran $n \text{ x } 1$ dengan $E(\underline{\varepsilon}) = \underline{0}$ dan $\text{cov}(\underline{\varepsilon}) = \sum$.

Pendugaan Koefisien Regresi

Koefisien-koefisien fungsi dalam persamaan regresi linier berganda dapat diduga, salah satunya dengan metode kuadrat terkecil. Penduga bagi model linier pada persamaan (2-15) adalah:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_j X_{ji} \tag{2-16}$$

Seperti pada metode ortogonal polinomial, akan dicari $\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_j$ yang meminimumkan jumlah kuadrat galat. Jumlah kuadrat galat dalam bentuk matriks kuadrat, $\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}$ adalah

$$\begin{aligned}
\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} &= \left(\underline{Y} - \underline{X}\hat{\underline{\beta}}\right)' \left(\underline{Y} - \underline{X}\hat{\underline{\beta}}\right) \\
&= \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{Y}'\underline{X}\hat{\underline{\beta}} - \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y} + \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{X}\hat{\underline{\beta}} \\
&= \underline{Y}'\underline{Y} - 2\,\underline{Y}'\underline{X}\hat{\underline{\beta}} + \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{X}\hat{\underline{\beta}}
\end{aligned} \tag{2-17}$$

Perhatikan bahwa $\underline{Y}'\underline{X}\hat{\underline{\beta}} = \hat{\underline{\beta}}'\underline{X}'\underline{Y}$ karena keduanya skalar (Sembiring, 1995).

Selanjutnya, persamaan (2-17) diturunkan terhadap $\hat{\underline{\beta}}$ dan menyamakannya dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial \underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon}}{\partial \hat{\underline{\beta}}} = -2\,\underline{Y}'\underline{X} + 2\,\underline{X}'\underline{X}\underline{\beta} = 0$$

sehingga

$$\underline{X}'\underline{X}\hat{\underline{\beta}} = \underline{X}'\underline{Y} \tag{2-18}$$

Persamaan (2-18) disebut persamaan normal. Kalikan setiap ruas persamaan dengan $\left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1}$, sehingga diperoleh penduga $\underline{\beta}$ berbentuk persamaan

$$\hat{\underline{\beta}} = \left(\underline{X}'\underline{X}\right)^{-1} \underline{X}'\underline{Y} \tag{2-19}$$

Regresi Polinomial

Regresi polinomial merupakan regresi yang menggambarkan hubungan antara satu variabel respon terhadap dua atau lebih variabel perlakuan dalam bentuk non linier. Secara umum model regresi polinomial dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + \cdots + \beta_j X_i^j + \varepsilon_i \qquad (2\text{-}20)$$

Dimana $X, X^2, \ldots, X^j$ merupakan bentuk-bentuk linier, kuadratik, ... dari taraf–taraf perlakuan berjarak sama yang ditentukan. Jika $X_{1i} = X_i$, $X_{2i} = X_i^2$, ..., $X_{ji} = X_i^j$, maka model pada persamaan (2-20) menjadi model regresi linier berganda. Oleh karena itu, koefisien regresi polinomial ini merupakan penduga $\underline{\beta}$ untuk sejumlah n pengamatan dari $(X_1, X_2, \ldots, X_j \text{ dan } Y)$ berbentuk persamaan (2-19) dengan

$$\underline{X}'\underline{X} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i & \sum X_i^2 & \ldots & \sum X_i^j \\ \sum X_i & \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \ldots & \sum X_i^{j+1} \\ \sum X_i^2 & \sum X_i^3 & \sum X_i^4 & \ldots & \sum X_i^{j+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum X_i^j & \sum X_i^{j+1} & \sum X_i^{j+2} & \ldots & \sum X_i^{2j} \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \\ \sum X_i^2 Y_i \\ \vdots \\ \sum X_i^j Y_i \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}21)$$

Terlihat jelas bahwa semakin besar nilai j, artinya dengan semakin banyaknya peubah bebas yang digunakan didalam model, semakin rumit cara mendapatkan nilai $\underline{\hat{\beta}}$ secara manual karena ukuran matriks $(\underline{X}'\underline{X})$ sudah semakin besar.

Jika $N = n$, maka untuk sejumlah n taraf perlakuan dan r ulangan perlakuan yang sama, gambaran analisis penentuan fungsi polinomial dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 2. n Taraf Perlakuan dan r Ulangan Perlakuan yang Sama

Y	X_1	X_2	X_3	$\ldots$	X_n
1	Y_{11}	Y_{21}	Y_{31}	$\ldots$	Y_{n1}
2	Y_{12}	Y_{22}	Y_{32}	$\ldots$	Y_{n2}
3	Y_{13}	Y_{23}	Y_{33}	$\ldots$	Y_{n3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
r	Y_{1r}	Y_{2r}	Y_{3r}	$\ldots$	Y_{nr}

Dari tabel diatas dapat ditentukan fungsi-fungsi polinomial yaitu

- Untuk 2 taraf perlakuan

Misalkan diberikan dua perlakuan pada satuan percobaan yaitu X_1 dan X_2. Untuk taraf perlakuan berjarak sama berlaku $X_2 = X_1 + d$, dengan d adalah jarak antar perlakuan. Persamaan regresi polinomial untuk dua taraf perlakuan adalah

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X$$

Untuk sejumlah r ulangan perlakuan yang sama, diperoleh

$$\underline{X}'\underline{X} = \begin{bmatrix} 2r & r(X_1 + X_2) \\ r(X_1 + X_2) & r(X_1^2 + X_2^2) \end{bmatrix} \text{ dan } \underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r} (Y_{1k} + Y_{2k}) \\ X_1 \sum_{k=1}^{r} Y_{1k} + X_2 \sum_{k=1}^{r} Y_{2k} \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}22)$$

Tentukan invers matriks $\underline{X'X}$ dan kalikan dengan matriks $\underline{X'Y}$, sehingga diperoleh penduga koefisien β_0 dan β_1.

- Untuk 3 taraf perlakuan

Misalkan diberikan tiga perlakuan pada satuan percobaan yaitu X_1, X_2 dan X_3. Untuk taraf perlakuan berjarak sama berlaku $X_2 = X_1 + d$ dan $X_3 = X_2 + d$. Persamaan regresi polinomial untuk tiga taraf perlakuan adalah

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2$$

Untuk sejumlah r ulangan perlakuan yang sama, diperoleh

$$\underline{X'X} = \begin{bmatrix} 3r & r(X_1 + X_2 + X_3) & r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) \\ r(X_1 + X_2 + X_3) & r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) \\ r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) & r(X_1^4 + X_2^4 + X_3^4) \end{bmatrix} \quad \text{(2-23a)}$$

dan

$$\underline{X'Y} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r} (Y_{1k} + Y_{2k} + Y_{3k}) \\ X_1 \sum_{k=1}^{r} Y_{1k} + X_2 \sum_{k=1}^{r} Y_{2k} + X_3 \sum_{k=1}^{r} Y_{3k} \\ X_1^2 \sum_{k=1}^{r} Y_{1k} + X_2^2 \sum_{k=1}^{r} Y_{2k} + X_3^2 \sum_{k=1}^{r} Y_{3k} \end{bmatrix} \quad \text{(2-23b)}$$

Determinan matriks berukuran $(\underline{X'X})$ dapat ditentukan dengan aturan sorrus dan matriks inversnya dapat ditentukan dengan aturan adjoin yaitu

$$(\underline{X'X})^{-1} = \frac{1}{\det(\underline{X'X})} \, adj \, (\underline{X'X}) \quad \text{(2-24)}$$

Dengan mengalikan matriks $(\underline{X'X})^{-1}$ dan $\underline{X'Y}$ diperoleh penduga β_0, β_1 dan β_2.

- Untuk 4 taraf perlakuan

Misalkan diberikan empat perlakuan pada satuan percobaan yaitu X_1, X_2, X_3 dan X_4. Untuk taraf perlakuan berjarak sama berlaku $X_2 = X_1 + d$, $X_3 = X_2 + d$, dan $X_4 = X_3 + d$. Persamaan regresi polinomial untuk empat taraf perlakuan adalah

$$\hat{Y} = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3$$

Untuk sejumlah r ulangan perlakuan yang sama, diperoleh

$$\underline{X'X} = \begin{bmatrix} 4r & r(X_1 + X_2 + X_3) & r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) \\ r(X_1 + X_2 + X_3) & r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) & r(X_1^4 + X_2^4 + X_3^4) \\ r(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2) & r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) & r(X_1^4 + X_2^4 + X_3^4) & r(X_1^5 + X_2^5 + X_3^5) \\ r(X_1^3 + X_2^3 + X_3^3) & r(X_1^4 + X_2^4 + X_3^4) & r(X_1^5 + X_2^5 + X_3^5) & r(X_1^6 + X_2^6 + X_3^6) \end{bmatrix} \quad \text{(2-25a)}$$

dan

$$\underline{X}'\underline{Y} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{r}(Y_{1k}+Y_{2k}+Y_{3k}) \\ X_1\sum_{k=1}^{r}Y_{1k}+X_2\sum_{k=1}^{r}Y_{2k}+X_3\sum_{k=1}^{r}Y_{3k} \\ X_1^2\sum_{k=1}^{r}Y_{1k}+X_2^2\sum_{k=1}^{r}Y_{2k}+X_3^2\sum_{k=1}^{r}Y_{3k} \\ X_1^3\sum_{k=1}^{r}Y_{1k}+X_2^3\sum_{k=1}^{r}Y_{2k}+X_3^3\sum_{k=1}^{r}Y_{3k} \end{bmatrix} \quad \text{(2-25b)}$$

Matriks $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ dicari dengan bantuan program matematika, seperti Microsoft Excel karena ukuran matriks $(\underline{X}'\underline{X})$ sudah semakin besar hingga diperoleh penduga β_0, β_1, β_2 dan β_3.

3. Hasil dan Pembahasan

Berikut diberikan teladan penerapan penentuan fungsi polinomial dengan dua, tiga dan empat taraf perlakuan. Misalkan diberikan taraf-taraf perlakuan X_1, X_2, X_3, dan, X_4. Secara keseluruhan datanya diberikan pada tabel dibawah ini

Tabel 3. Data Hingga Empat Taraf Perlakuan

Y	X			
	0	10	20	30
1	415	325	35	15
2	423	333	43	13
3	417	327	37	17
4	414	324	34	14
5	421	331	41	11
Jumlah	2090	1640	190	70

- Untuk dua taraf perlakuan $(n=2)$ yaitu $X_1 = 0$ dan $X_2 = 10$

Berdasarkan tabel 3 diketahui: $r = 5$, $Y_{1.} = T_1 = 2090$, $Y_{2.} = T_2 = 1640$ dan $\overline{X} = 5$. Akan dicari fungsi polinomial dengan metode ortogonal polinomial dalam bentuk persamaan $Y_u^{'} = A_0\xi_0^{'} + A_1\xi_1^{'}$ dengan nilai-nilai koefisien dan polinomialnya dicari yaitu

$$A_0 = \frac{2090+1640}{(5 \text{ x } 2)} = 373\,;\; \xi_0' = 1\,;\; A_1 = \frac{(-1 \text{ x } 2090)+(1 \text{ x } 1640)}{(5 \text{ x } 2)} = -45\,;\; \xi_1' = 2\left(\frac{X-5}{10}\right)$$

Sehingga diperoleh persamaan polinomialnya adalah

$$Y_u^{'} = 418 - 9\ X$$

Selanjutnya, dengan teknik analisis regresi diperoleh nilai persamaan regresinya adalah

$$\hat{Y} = 418 - 9\ X$$

- Untuk tiga taraf perlakuan $(n=3)$ yaitu $X_1 = 0$, $X_2 = 10$ dan $X_3 = 20$

Berdasarkan tabel 3 diketahui: $r = 5$, $Y_{1.} = T_1 = 2090$, $Y_{2.} = T_2 = 1640$, $Y_{3.} = T_3 = 190$, dan $\overline{X} = 10$. Prosedur penentuan fungsi polinomial sama dengan dua taraf perlakuan sehingga diperoleh persamaan polinomialnya adalah

$$Y_u^{'} = 418 + X - X^2$$

Selanjutnya, dengan teknik analisis regresi diperoleh persamaan regresinya adalah

$$\hat{Y} = 418 + X - X^2$$

- Untuk empat taraf perlakuan $(n = 4)$ yaitu $X_1 = 0, X_2 = 10, X_3 = 20$ dan $X_4 = 30$

  Berdasarkan tabel 3 diketahui: $r = 5$, $Y_{1.} = T_1 = 2090$, $Y_{2.} = T_2 = 1640$, $Y_{3.} = T_3 = 190$, $Y_{4.} = T_4 = 70$ dan $\overline{X} = 15$.

Tabel 4. Analisis Keragaman Untuk Empat Taraf Perlakuan

No.	Sumber keragaman	db	JK	KT	F_{hitung}	F_{tabel}	
						$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.05$
1.	Perlakuan X	3	1419540.5	473180.1667	37854.4	5,2922	3,2389
2.	Error (ε)	16	200	12.5			
3.	Total (T)	19	1419740.5				

Dapat dilihat, nilai $F_{hitung} \geq F_{tabel}$ untuk kedua taraf signifikan α, berarti perlakuan memberikan pengaruh nyata terhadap satuan percobaan.

Tabel 5. Koefisien Ortogonal Polinomial untuk Empat Taraf Perlakuan

Derajat polinomial	Total dari Sejumlah r Pengamatan ke- j				$\sum_i (\xi_i')^2$	λ	Kontras	$JK(kontras)$
	$Y_{1.}$	$Y_{2.}$	$Y_{3.}$	$Y_{4.}$				
	2090	1640	190	70				
Linier	-3	-1	+1	+3	20	2	-7650	585225
Kuadratik	+1	-1	-1	+1	4	1	330	5445
Kubik	-1	+3	-3	+1	20	$\frac{10}{3}$	2330	54289

Dari tabel diatas dapat dilihat bahwa derajat polinomial tertinggi yang paling nyata adalah kubik. Akan dicari nilai-nilai koefisien dan polinomialnya yaitu

$$A_0 = \frac{2090 + 1640 + 190 + 70}{(5 \text{ x } 4)} = \frac{3990}{20} = \frac{399}{2}\,;\ \xi_0' = 1$$

$$A_1 = \frac{((-3) \text{ x } 2090) + ((-1) \text{ x } 1640) + (1 \text{ x } 190) + (3 \text{ x } 70)}{(5 \text{ x } 20)} = \frac{-751}{10}\,;\ \xi_1' = \frac{X - 15}{10}$$

$$A_2 = \frac{(1 \text{ x } 2090) + ((-1) \text{ x } 1640) + ((-1) \text{ x } 190) + (1 \text{ x } 70)}{(5 \text{ x } 4)} = \frac{33}{2}\,;\ \xi_2' = \left(\frac{X - 10}{10}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

$$A_3 = \frac{((-1) \text{ x } 2090) + (3 \text{ x } 1640) + ((-3) \text{ x } 190) + (1 \text{ x } 70)}{(5 \text{ x } 20)} = \frac{233}{10}\,;\ \xi_3' = \frac{10}{3}\left(\frac{X - 15}{10}\right)^3 - \frac{41}{6}\left(\frac{X - 15}{10}\right)$$

Sehingga diperoleh persamaan polinomialnya adalah

$$Y_u' = 418.00000000 + 16.53333333\,X - 3.33000000\,X^2 + 0.07766667\,X^3$$

Dengan teknik analisis regresi diperoleh persamaan regresinya adalah

$$\hat{Y} = 418.00000000 + 16.53333333\,X - 3.33000000\,X^2 + 0.07766667\,X^3$$

4. Kesimpulan dan Saran

Dari contoh data yang diambil sebagai teladan penerapan, penentuan fungsi polinomial dengan metode ortogonal polinomial memberikan hasil yang sama jika dikaji dengan teknik analisis regresi. Oleh karena itu, metode ortogonal polinomial dapat digunakan tanpa harus menganalisis ulang dengan teknik analisis regresi untuk mendapatkan fungsi polinomialnya.

Pada skripsi ini, penulis hanya membahas tentang penentuan fungsi dengan metode ortogonal polinomial yang selanjutnya dikaji dengan teknik analisis regresi untuk taraf kuantitatif berjarak sama. Hasilnya, kedua metode tersebut dapat digunakan untuk menentukan fungsinya. Untuk penelitian lebih lanjut, sebaiknya juga dibahas penentuan fungsi untuk taraf kuantitatif berjarak tak sama dengan menentukan metode mana yang tepat digunakan.

DAFTAR PUSTAKA

1. Anonim.2007. *Taraf Perlakuan Berjarak Sama*. http://209.85.175.104/search?q=cache:aSit0whzIJ.staff.unud.ac.id/~sampurna/wp-content/uploads/2007/12/metodologi-ilmiah.doc
2. Anonim. 2008. *Rancangan Percobaan*. http://id.wikipedia.org/wiki/statistika
3. Anton, H. 1991. *Aljabar Linier Elementer*. Edisi Kelima. Erlangga. Jakarta
4. Dean. A and D. Voss. 1999. *Design and Analysis of Experiments*. Springer-Verlag. New York
5. Gomez. K.A and A.A. Gomez. 1984. *Statistical Procedures for Agricultural Research.* 2nd ed. An International Rice Research *Design Of Experiments*. Third Edition. CBS College Publishing. New York
6. Graybill, F.A. 1976. *Theory and Application Of The Linear Model*. Wadsworth Publishing Company, Inc. California
7. Hicks, C.R. 1982. *Fundamental Concepts In The of Scientific Experiments. An Introduction with Some Emphasis on Computation*. Addison-Wesley Publishing Company
8. Lentner, M and T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valley Book Company. Blacksburg, VA
9. Nugroho, S. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan*. Edisi Pertama. Unib Press. Bengkulu
10. Peng, K.C. 1967. *The Design and Analysis* Institute Book. John Wiley & Sons. Singapore
11. Rawling, J.D. 1988. *Applied Regression Analysis A Research Tool*. Wadsworth, Inc. California
12. Sembiring, R.K . 1995. *Analisis Regresi*. ITB. Bandung
13. Sriliana, I. 2007. *Data Hilang Dalam Rancangan Acak Kelompok Lengkap dan Rancangan Bujur Sangkar Latin Dasar)*. Skripsi MIPA Matematika UNIB
14. Sudjana. 2001. *Teknik Analisis Regresi dan Korelasi Bagi Para Peneliti*. Tarsito. Bandung
15. Weisberg, S. 2005. *Applied Linear Regression*. Third Edition. John Wiley & Sons, Inc. Canada