# KAJIAN UJI NONPARAMETRIK PENGARUH PERLAKUAN TETAP PADA RANCANGAN ACAK LENGKAP

**Andi Octa Fengki[1], Sigit Nugroho[2], dan Fachri Faisal[2]**
*1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu*
*2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu*

## ABSTRACT

Fix treatment effect on completely randomized designs (CRD) can be tested by using nonparametric test or parametric test. Each of the tests has its criterions and assumptions that have to be fulfilled. The aims of this research are to study the creterions and methods of each test, to illustrate Median test exact distribution and Kruskal-Wallis Table, and to study of Bell-Doksum test consistence. The problem in this research limited to one way ANOVA both parametrically and nonparametrically (Median, Kruskal-Wallis, and Bell-Doksum). The result obtained from the examples and data simulations indicate that parametric test one way ANOVA is better to use, if samples having normal distribution with equal variances. But, nonparametric tests are better to be used for samples having normal distribution with unequal variances and also for samples that are not normally distributed. Among three nonparametric tests, Bell-Doksum gives better result than two other tests.

Keyword: *Analysis of Varians (ANOVA), Median, Kruskal-Wallis, Bell-Doksum , and k Independent Sample*

## 1. Pendahuluan

Salah satu rancangan lapangan adalah rancangan acak lengkap (RAL). Rancangan ini diterapkan pada percobaan yang dilakukan pada kondisi lingkungan relatif homogen atau dapat dianggap homogen. Lingkungan disini adalah faktor-faktor lain diluar yang diteliti. Setiap unit percobaan pada RAL diacak secara sempurna tanpa dibatasi oleh blok.

Sesuai dengan tujuan merancang percobaan secara khusus untuk mengukur pengaruh perlakuan. Pada RAL juga dilakukan pengukuran pengaruh perlakuan. Di mana pengaruh perlakuan ini terbagi dua yaitu pengaruh perlakuan tetap dan pengaruh perlakuan acak. Pengaruh perlakuan tetap artinya sampel tidak mengeneralisasi keadaan dilapangan. Sedangkan pengaruh perlakuan acak merupakan kebalikannya.

Pengaruh perlakuan pada rancangan acak lengkap kebanyakan dianalisis dengan menggunakan analisis varian (ANAVA) satu arah. Hipotesis pada pengaruh perlakuan pada RAL umumnya diuji dengan uji $F$. Hal ini dapat dilakakukan jika contoh percobaan diasumsikan diambil dari populasi-populasi yang berdistribusi normal dengan varian-varian yang sama (Daniel, 1989). Contoh ini minimal berskala interval atau rasio. Namun, ada kondisi tertentu penganalisisan dan pengujian ini tidak sahih, yaitu pada kondisi data berskala nominal dan ordinal atau contoh diambil populasi yang tidak diketahui distribusinya atau distribusi populasi tidak dapat diasumsikan normal.

Pada kondisi data berskala nominal dan ordinal atau distribusi dari populasi di mana contoh diambil tidak diketahui, maka dilakukan pengujian pengaruh perlakuan dengan uji nonparametrik. Uji nonparametrik ini merupakan alternatif yang dapat diambil bila asumsi-asumsi pada uji parametrik tidak terpenuhi.

Misalkan diperoleh data dari percobaan dengan RAL, namun data tersebut tidak memenuhi asumsi-asumsi uji parametrik. Sehingga prosedur alternatif yang digunakan untuk menguji pengaruh perlakuan tetap tersebut adalah uji nonparametrik perlakuan tetap pada RAL. Di lain pihak, terdapat beberapa pilihan uji dalam menguji perlakuan tetap pada RAL, sehingga perlu dilakukan pengkajian. Dengan harapan dapat menambah pemahaman tentang uji-uji tersebut.

Penelitian ini dilakukan untuk mengetahui kriteria dari metode pengujian uji pengaruh perlakuan tetap pada RAL, baik uji parametrik maupun nonparametrik, untuk mengilustrasikan distribusi pasti uji median dan Tabel Kruskal-Wallis, dan untuk mengetahui kekonsistenan uji Bell-Doksum. Namun, penggunaan ANAVA satu arah sebagai uji parametrik perlakuan tetap pada RAL dan uji Median, uji Kruskal-Wallis, dan uji Bell-Doksum untuk uji nonparametriknya menjadi suatu batasan penelitian ini.

## 2. Uji Pengaruh Perlakuan Perlakuan Tetap pada RAL

Model RAL merupakan model rancangan percobanan yang sederhana. Total variasi pada RAL dibagi menjadi dua, yaitu variasi perlakuan dan variasi galat. Atau dapat dituliskan menjadi

$$\textit{Total variasi} = \textit{variasi perlakuan} + \textit{variasi galat} \tag{1}$$

Dapat juga dituliskan dengan model linier menjadi

$$Y_{ij} = \mu + \tau_j + \varepsilon_{ij} \text{ untuk } i = 1,2,...,n_j \text{ dan } j = 1,2,...,k \tag{2}$$

dengan asumsi $\varepsilon_{ij} \sim NID\left(0,\sigma^2\right)$ dan $\sum_{j=1}^{k} n_j \tau_j = 0$ .

Banyaknya $k$ perlakuan yang digunakan pada RAL didefinisikan sebagai sebuah himpunan dari $k$ perlakuan populasi yang memiliki rata-rata $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_k$ sering disebut rata-rata perlakuan. Dimana rata-rata inilah yang akan diuji pada rancangan acak pengaruh tetap. Apakah semua rata-rata perlakuan tersebut semuanya sama atau tidak.

Uji pengaruh perlakuan tetap tetap pada RAL yaitu menguji serentak kesamaan rata-rata perlakuan atau menguji pengaruh perlakuan sama dengan nol. Hipotesis nol ditulis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_k$$

atau

$$H_0 : \text{Semua rata-rata perlakuan sama}$$

atau

$$H_0 : \tau_j = 0 \text{, untuk setiap } j$$

Jika hipotesis nol diterima, maka rata-rata perlakuan masing-masing populasi sama. Ini mengindikasikan bahwa pengaruh perlakuan tetap pada masing-masing populasi.

Pengujian pengaruh perlakuan tetap pada RAL dapat dilakukan dengan metode parametrik maupun metode nonparametrik. Untuk metode parametrik dapat digunakan Analisis Varian (ANAVA) atau uji $F$, sedangkan untuk uji nonparametrik dapat digunakan uji Median, uji Kruskal-Wallis, dan uji Bell-Doksum.

## 3. Uji Parametrik

Jika contoh-contoh pada rancangan acak lengkap (RAL) memenuhi asumsi bahwa telah diambil dari populasi-populasi yang berdistribusi normal dengan varian-varian konstan, maka perlakuan tetap pada RAL dapat diuji dengan menggunakan uji parametrik. Secara implisit ini berarti bahwa asumsi kenormalan terpenuhi dan kehomogenan varian juga terpenuhi. Uji parametrik perlakuan tetap pada RAL diuji dengan menggunakan ANAVA satu arah.

Analisis varian (ANAVA) adalah proses pembagian variasi total pengamatan percobaan ke dalam porsi-porsi yang dapat dicirikan untuk mengetahui sumber-sumber keragaman. Salah satu jenis ANAVA adalah ANAVA satu arah. ANAVA satu arah merupakan salah satu alat penting untuk menganalisa data rancangan percobaan yang berdasarkan model RAL di atas (Hinkelmann dan Kimpthorne, 2008). Oleh karenanya, pengaruh perlakuan tetap pada RAL diuji dengan menggunakan ANAVA satu arah.

ANAVA satu arah menggunakan prinsip pembagian total variasi menjadi variasi perlakuan dan variasi galat. Akibatnya, pada ANAVA Satu arah muncul istilah jumlah kuadrat total (JKT), jumlah kuadrat perlakuan (JKP), dan jumlah kuadrat galat (JKG), yaitu

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{..}\right)^2=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..}\right)^2+\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2 \quad (3)$$

atau dapat ditulis menjadi

$$JKT = JKP + JKG \quad (4)$$

Selanjutnya akan dihitung komponen ANAVA sesuai dengan teori di atas ditambah dengan derajat bebas (*db*). Berikut ini beberapa rumus untuk melengkapi komponen-komponen tabel ANAVA pada RAL menurut Lentner dan Bishop (1986):

$$dbPerlakuan = t - 1 \quad (5)$$

$$dbGalat = n - t \quad (6)$$

$$\text{Faktor Koreksi } (FK) = \frac{Y_{..}^2}{r_i t} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}\right)^2}{r_i t} \quad (7)$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}^2 - FK \quad (8)$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\overline{Y}_{i.}-\overline{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\left(\frac{Y_i^2}{r_i}\right) - FK \quad (9)$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij}-\overline{Y}_{i.}\right)^2 = JKT - JKP \quad (10)$$

$$KTP = \frac{JKP}{dbPerlakuan} \quad (11)$$

$$KTG = \frac{JKG}{dbGalat} \quad (12)$$

Selanjutnya, setelah dilakukan beberapa perhitungan di atas, hasil yang diperoleh digunakan untuk melengkapi tabel analisis varian (ANAVA) satu arah. Setiap nilai yang diperoleh disubtitusikan pada kolom yang besesuaian. Tabel ANAVA tersebut dapat dilihat pada Tabel 1.

**Tabel 1. Analisis Varian (ANAVA) Satu Arah**

| Sumber Keragaman | $db$ | $JK$ | $KT$ | $NHKT$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| Perlakuan | $t-1$ | $JKP$ | $KTP$ | $\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{t-1}\sum_{i=1}^{t} r_i \tau_i^2$ | $\sigma_\varepsilon^2 + r_0 \sigma_\tau^2$ |
| Galat | $n-t$ | $JKG$ | $KTG$ | $\sigma_\varepsilon^2$ | $\sigma_\varepsilon^2$ |
| Total | $n-1$ | $JKT$ | | | |

Statistik uji yang digunakan untuk menguji perlakuan dengan taraf $\alpha$ adalah $F$, dengan perhitungan sebagai berikut

$$F_{hitung} = \frac{KTP}{KTG} \tag{13}$$

Nilai $F_{hitung}$ tersebut dibandingkan dengan $F_{tabel}$ yang memiliki derajat bebas pertama $k-1$ dan derajat bebas kedua $N-k$.

## 4. Uji Nonparametrik

Uji nonparametrik perlakuan tetap menggunakan data tidak normal. Namun, data yang diproses dalam pengujian atau yang dihitung menggunakan masing-masing statistik ujinya bukan data asli hasil pengamatan, akan tetapi merupakan data ordinal. Data ordinal ini merupakan data baru yang diperoleh dari pemberian pringkat pada data pengamatan asli.

Uji nonparametrik perlakuan tetap ini semuanya menggunakan distribusi kai-kuadrat sebagai pendekatan, kecuali untuk uji Bell-Doksum. Pada uji Bell-Doksum distribusi kai-kuadrat bukan distribusi pendekatan tetapi merupakan distribusi pasti uji tersebut. Distribusi kai-kuadrat digunakan sebagai pendekatan untuk contoh besar karena kesulitan memperoleh distribusi pasti masing-masing uji. Distribusi kai-kuadrat yang digunakan dalam pembahasan ini menggunakan parameter yang sama yaitu derajat bebasnya $k-1$. Oleh karenanya, pemahaman mengenai distribusi kai-kuadrat merupakan hal mendasar yang perlu dikenal sebelum melakukan pengujian dengan menggunakan uji-uji nonparametrik ini.

### 4.1 Uji Median

Untuk melakukan pengujian dengan uji Median, diperlukan beberapa asumsi. Asumsi-asumsi tersebut adalah sebagai berikut (Conover,1971):

1. Setiap contoh adalah contoh acak.
2. Contoh-contoh acak tersebut saling bebas.
3. Skala pengukurannya minimal skala ordinal.
4. Jika setiap populasi memiliki median yang sama, semua populasi memiliki peluang yang sama $p$ dari sebuah pengamatan lebih besar dari median keseluruhan yang sama pula.

Hipotesis yang diuji pada uji Median adalah apakah semua contoh yang diambil berasal dari populasi-populasi yang memiliki median-median yang sama.. Hipotesis dapat dituliskan menjadi:

$H_0$ : Semua $k$ populasi memiliki median yang sama
$H_1$ : Minimal ada satu median populasi yang berbeda

Atau dengan notasi

$H_0$ : $M_1 = M_2 = ... = M_k$
$H_1$ : $\exists i, j, i \neq j \ni M_i \neq M_j$ , $i, j = 1,2,...,k$

Jika $H_o$ diterima, maka median $k$ populasi pengamatan sama. Artinya, setiap perlakuan memberikan pengaruh yang tetap pada setiap pengamatan.

Untuk menguji hipotesis uji Median seperti tersebut di atas, digunakan suatu statistik uji. Statistik uji ini dapat dihitung berdasarkan tabel uji Median (kontingensi $2 \times k$ )pada Tabel 2 berikut

**Tabel 2. Tabel Kontingensi Uji Median**

| | Contoh | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | $k$ | 1 | |
| $> M$ | $O_{11}$ | $O_{12}$ | … | $O_{1k}$ | $O_{11}$ | $C_1$ |
| $\leq M$ | $O_{21}$ | $O_{22}$ | … | $O_{2k}$ | $O_{21}$ | $C_2$ |
| Total | $n_1$ | $n_2$ | … | $n_k$ | $n_1$ | $N$ |

Statistik uji Median dapat dituliskan sebagai berikut

$$T = \frac{N^2}{C_1 C_2} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(O_{1j} - \frac{n_j C_1}{N}\right)}{n_j} \tag{14}$$

atau untuk mempermudah proses penghitungan, dapat menggunakan bentuk lain statistik uji tersebut di atas, yaitu

$$T = \frac{N^2}{C_1 C_2} \sum_{j=1}^{k} \frac{O_{1j}^2}{n_j} - \frac{NC_1}{C_2} \tag{15}$$

Jika nilai $C_1$ kira-kira sama dengan atau sangat dekat dengan nilai $C_2$, maka rumus statistik uji di atas dapat diubah menjadi

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(O_{1j} - O_{12}\right)^2}{n_j} \tag{16}$$

Persaman dalam bentuk terakhir ini merupakan statistik uji untuk uji Median yang sering digunakan. Jika nilai $C_1 = C_2$, maka persaman dalam bentuk terakhir ini menghasilkan sebaran pasti, dengan peluang diperoleh dengan

$$P\left( \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline O_{11} & O_{12} & \cdots & O_{1k} \\ \hline O_{21} & O_{22} & \cdots & O_{2k} \\ \hline \end{array} \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \atop \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_k \end{array} \quad N \right) = \frac{\binom{n_1}{O_{11}}\binom{n_2}{O_{12}} \cdots \binom{n_k}{O_{1k}}}{\binom{N}{C_1}} \tag{17}$$

Akan tetapi, jika tidak demikian akan kesulitan dalam menetukan sebaran pastinya, maka digunakan sebaran pendekatan. Oleh karenanya, aturan pengambilan keputusan uji Median sebagai pendekatan adalah tolak $H_0$ jiika $T > \chi^2_{(1-\alpha, k-1)}$.

**4.2 Uji Kruskal-Wallis**

Uji Kruskal-Wallis merupakan perluasan dari uji Mann-Witney dengan contoh independen lebih dari dua. Misal, diketahui $X_{ij}$ adalah pengamatan ulangan ke-$i$ contoh ke-$j$, $k$ banyaknya contoh acak yang diamati, dengan $i = 1,2..,r$ dan $j = 1,2,...,k$. Kemudian $N$ adalah banyaknya keseluruhan pengamatan, merupakan penjumlahan dari banyaknya pengamatan masing-masing contoh $n_j$, atau dapat dirumuskan menjadi:

$$N = \sum_{j=1}^{k} n_j \tag{18}$$

Peringkatkan semua pengamatan untuk seluruh contoh dari data terkecil sampai terbesar, sehingga peringkat data terkecil adalah 1 dan $N$ adalah peringkat data terbesar. Peringkat masing-masing pengamatan dilambangkan dengan $R(X_{ij})$. Perlu diperhatikan bahwa dalam pemeringkatan, data yang sama atau kembar peringkatnya dirata-ratakan. Rata-rata peringkat ini merupakan peringkat untuk masing-masing pengamatan yang kembar. Keadaan ini yang membedakan uji Kruskall-Wallis terhadap uji Median sebelumnya. Uji Kruskall-Wallis mempertimbangkan pengamatan yang kembar, sedangkan uji Median tidak mempermhatikan informasi tersebut.

Setelah data diperingkatkan, kemudian dihitung jumlah peringkat keseluruhan pengamatan pada masing-masing contoh. Jumlah peringkat keseluruhan pengamatan pada contoh ke-$j$ dilambangkan dengan $R_j$, perhitungannya menggunakan

$$R_j = \sum_{j=1}^{k} R(X_{ij}) \tag{19}$$

Kemudian hitung statistik uji Kruskal-Wallis dengan rumus (20) atau (21).

Conover (1971) menyatakan bahwa asumsi-asumsi yang diperlukan untuk melakukan pengujian dengan menggunakan uji Kruskal-Wallis adalah:

1. Semua contoh merupakan contoh acak dari populasinya.
2. Sebagai tambahan dari independensi dalam tiap contoh, juga ada independensi antar contoh.
3. Semua peubah acak $X_{ij}$ kontinu (sejumlah nilai kembar masih diperbolehkan).
4. Skala pengukurannya minimal skala ordinal.
5. Fungsi sebaran $k$ populasi identik atau beberapa populasi cenderung memiliki nilai yang lebih besar dari populasi lainnya.

Sedangkan, hipotesis uji Kruskal-Wallis dapat dinyatakan dengan

$H_0$ : Semua fungsi sebaran $k$ populasi identik

$H_1$ : Sedikitnya ada satu populasi cendrung memiliki nilai yang lebih besar dari populasi lainnya.

Uji Kruskal-Wallis sensitif terhadap perbedaan diantara rata-rata $k$ populasinya, sehingga hipotesis alternatifnya dapat juga ditulis menjadi

$H_1$ : $k$ populasi tidak memiliki rata-rata yang sama

Statistik uji Kruskal-Wallis didefinisikan dengan

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left[ R_j - \frac{n_j(N+1)}{2} \right]}{n_j} \qquad (20)$$

Untuk kemudahan perhitungan, rumus statistik uji dapat disederhanakan menjadi

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{j=1}^{k} \frac{R_i^2}{n_j} - 3(N+1) \qquad (21)$$

Distribusi pasti dari $H$ dapat ditentukan, tetapi untuk contoh dan pengulangan yang sedikit karena perhitungannya akan menjadi rumit untuk yang lebih besar. Kruskal-Wallis mengusulkan untuk menggunakan tabel Kruskal-Wallis untuk ukuran contoh kurang dari atau sama dengan lima dan dan banyaknya contoh sama dengan tiga. Jika tidak demikain, maka digunakan distribusi Kai-Kuadrat sebagai pendekatan.

Adapun aturan pengambilan keputusan pengujian dengan menggunakan statistik uji Kruskal-Wallis adalah

1. Jika dalam pengujian digunakan $k = 3$ dan $n_j \leq 5, j = 1,2,...,k$, maka daerah kritis pasti berukuran $\alpha$ dapat diperoleh dari tabel Kruskal-Wallis pada lampiran. Jika nilai $H$ lebih besar dari $H$ pada pada tabel Kruskal-Wallis yang bersesuaian, maka tolak hipotesis nol pada taraf pengujian tertentu.
2. Untuk $k > 3$ dan $n_j > 5, j = 1,2,...,k$, digunakan pendekatan dengan distribusi kai-kuadrat dengan derajat bebas $k-1$. Jika nilai $H$ lebih besar atau sama dengan kai-kuadrat dengan derajat bebas $k-1$, maka tolak hipotesis nol pada taraf nyata $\alpha$ tertentu.

### 4.3 Uji Bell-Doksum

Metode pengujian pengaruh perlakuan tetap pada reancangan acak lengkap dapat juga dilakukan dengan uji Bel Doksum, yaitu uji Bell- Doksum untuk beberapa contoh saling bebas atau sering juga dinyatakan sebagai uji Bell-Doksum untuk $k$ contoh saling bebas. Metode pengujian uji Bell-Doksum ini juga menggunakan prinsip pemeringkatan pada data pengamatan yang asli. Akan tetapi dalam proses perhitunganstatistik uji digunakan bantuan nilai deviasi normal baku. Seperti diketahui bahwa dengan menggunakan deviasi normal baku, dapat diperoleh distribusi pasti dari statistik uji. Dalam pengujian ini digunakan juga hubungan antara distribusi normal baku dan distribusi kai-kuadrat.

Misalkan, data terdiri dari $k$ contoh acak yang saling bebas dengan ukuran dapat berbeda. Misalkan juga, $X_{1j}, X_{2j},...X_{n_j j}$ merupakan variabel-variabel acak contoh ke- $j$ yang berukuran $n_j$. Jika $N$ merupakan total keseluruhan ukuran contoh, maka berikan peringkat semua pengamatan pada setiap contoh dengan peringkat dari 1 sampai $N$ seperti pada pemeringkatan Kruskal-Wallis. Peringkat pengamatan $X_{ij}$ dilambangkan dengan $R(X_{ij})$. Ambil $N$ bilangan dari deviasi normal baku dapat dilakukan dengan pembangkitan atau melihat tabel. Nilai deviasi normal baku ini juga diperingkatkan dari 1 sampai $N$. Gantikan data pengamatan dengan nilai deviasi normal baku yang memiliki peringkat yang sama. Jika data pengamatan ada yang kembar, maka peringkatnya dirata-ratakan dan nilai deviasi normal baku yang bersesuaian juga dirata-ratakan.

Misalkan, $Z(R(X_{ij}))$ merupakan nilai deviasi normal baku yang menggantikan data pengamatan $X_{ij}$ dengan peringkat yang sama dan $Z(r)$ adalah nilai deviasi normal baku terkecil- ke-$r$ yang menggantikan data pengamatan $X_{ij}$ yang memiliki peringkat $r$ pada data aslinya. Dengan demikian dapat dihitung nilai $Z$ untuk setiap $k$ contoh

$$Z_j = \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j} Z\left[R\left(X_{ij}\right)\right] \quad j = 1,2,\ldots,k \tag{22}$$

kemudian dihitung

$$\overline{Z} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} Z(r) \tag{23}$$

Tahapan-tahapan penghitungan tersebut merupakan rangkaian kerja yang diperlukan untuk dapat melakukan pengujian dengan uji Bell-Doksum. Informasi-informasi di atas nantinya digunakan untuk menghitung statistik uji Bell-Doksum (24).

Asumsi yang diperlukan untuk melakukan pengujian dengan uji Bell-Doksum menurut Conover (1971) adalah:

1. Semua contoh merupakan contoh acak dari populasinya.
2. Sebagai tambahan dari independensi dalam tiap contoh, juga ada independensi antar contoh.
3. Semua peubah acak $X_{ij}$ kontinu (sejumlah nilai kembar masih diperbolehkan).
4. Skala pengukurannya minimal skala ordinal.
5. Fungsi sebaran $k$ populasi identik atau beberapa populasi cenderung memiliki nilai yang lebih besar dari populasi lainnya.
6. Diasumsikan grup $N$ deviasi normal baku merupakan contoh acak berukuran $N$ dari sebaran normal baku.

Hipotesis yang diuji dengan uji Bell-Doksum adalah

$H_0$ : Semua $k$ populasi memiliki distribusi yang identik

$H_1$ : Paling sedikit satu populasi cendrung menghasilkan nilai yang lebih besar dari paling sedikit satu populasi lainnya.

Seperti uji Kruskal-Wallis, hipotesis alternatifnya kadang-kadang dapat dituliskan menjadi

$H_1$ : $k$ populasi tidak memiliki rata-rata yang sama

Statistik uji yang digunakan pada uji Bell-Doksum adalah

$$T_2 = \sum_{j=1}^{k} n_j\left(Z_j - \overline{Z}\right)^2 \tag{24}$$

Distribusi pasti dari $T_2$ sesuai dengan sifat distribusi pasti dari distribusi normal baku. Seperti diketahui bahwa distribusi normal baku selalu memiliki varian satu dan rata-rata nol.

Karena nilai deviasi normal baku diperoleh secara acak dengan dibangkitkan atau melihat tabel deviasi normal acak, nilai $T_2$ tidak unik. Nilai $T_2$ untuk pengujian satu data yang sama dapat berbeda-beda, tergantung cara pengambilan deviasi normal bakunya. Dapat saja seseorang mendapatkan hasil uji Bell-Doksum yang lebih signifikan dari yang lainnya, walaupun data yang digunakan sama. Bagaimanapun juga, keadaan ini sama saja dengan dua orang yang melakukan percobaan dan mendapatkan himpunan data yang berbeda. Oleh karena itu, untuk mengatasi variasi yang tidak diinginkan tersebut dilakukan pengaturan cara pengambilan deviasi acak normal baku. Salah satu cara yang dapat dilakukan untuk mengatasi variasi yang tidak dinginkan dalam uji Bell-Doksum dapat dilakukan dengan mengikuti beberapapa teknik yang disarankan berikut (Conover, 1971):

1. Melibatkan penggunaan rata-rata $Z(r)$, lakukan penggantian $Z(r)$ seperti disarankan oleh Bell-Doksum. Statistik terurut $Z(r)$ divariasikan dari contoh ke contoh lainnya. Tetapi rata-rata $Z(r)$ hanya tergantung pada peringkat $r$ statistik terurut dan ukuran contoh $N$. Penggunaan tabel deviasi normal acak diubah-ubah untuk mendapatkan $Z(r)$, biasanya tabel ini sudah tersedia. Tabel khusus dibutuhkan untuk dilihat apakah statistik uji signifikan, sedangkan ukuran contoh cukup besar untuk mengesahkan penggunaan distribusi pendekatan.
2. Menggunakan kuantil $\dfrac{r}{N+1}$ variabel acak normal baku untuk mengubah-ubah nilai $Z(r)$, dengan $r$ merupakan peringkat data pengamatan statistik terurut ke-$r$ dari contoh berukuran $N$ yang belum dirata-ratakan.

Aturan pengambilan keputusan uji Bell-Doksum adalah jika $T_2 > \chi_{1-\alpha,k-1}$, maka tolak $H_0$ pada taraf $\alpha$. Sebagai catatan distribusi ini adalah distribusi pasti bukan merupakan distribusi pendekatan seperti uji Median maupun uji Kruskal-Wallis.

## 5. Ilustrasi Distribusi Pasti Uji Median

Seperti diketahui pada pembahasan sebelumnya, distribusi pasti statistik uji median dapat ditentukan apabila jumlah total baris pertama dan total baris kedua pada tabel kontingensi uji Median nilainya sama atau setidaknya hampir sama agar hipotesis nol diterima. Akan tetapi, untuk total baris dan kolom yang tidak sama, distribusi pasti uji Median juga dapat ditentukan. Namun, ini sangat sulit dihitung karena sangat banyak kemungkinan yang diperoleh. Atau akan lebih banyak kemungkinan yang diperoleh dibanding total baris pertama dan total baris kedua tabel kontingensi uji Median yang sama. Oleh karenanya, dilakukan ilustrasi cara memperoleh distribusi pasti uji Median untuk jumlah total baris pertama dan total baris yang kedua sama.

Nilai distribusi pasti uji Median tersebut dapat dihitung dengan menggunakan rumus statistik uji median (16), karena sesuai dengan ketentuan nilai total baris pertama dan total baris kedua sama. Nilai yang diperoleh ini selanjutnya merupakan nilai variabel acak atau nilai kuantil distribusi pasti uji Median. Sedangkan, peluang distribusi pasti uji Median dapat ditentukan dengan rumus (17).

Pada pengilustrasian ini digunakan $k = 3$ dan $N = 6$, dengan perincian $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, dan $n_3 = 2$. Tabel kontingensi diatur sedemikian rupa sehingga total baris pertama sama dengan 3. Demikian juga dengan total baris kedua juga diatur sama dengan 3. Dengan demikian, diperoleh 7 kemungkinan tabel kontingensi dengan nilai distribusi dan peluang pasti uji Mediannya masing-masing. Akhirnya, semua perhitungan untuk 7 kemungkinan nilai distribusi dan peluang pasti uji Median di atas dapat dirangkum menjadi tabel nilai kuantil uji Median dan peluang pastinya untuk ukuran masing-masing contoh $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, dan $n_3 = 3$. Rangkuman tersebut dapat dilihat pada Tabel 3 berikut:

**Tabel 3. Distribusi Pasti Uji Median untuk $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, dan $n_3 = 3$**

| No. | $t$ | Banyaknya | $P(T = t)$ | $P(T \le t)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 0 | 1 | 0.4 | 0.4 |
| 2. | 4 | 6 | 0.1+0.1+0.1+0.1=0.6 | 1 |

## 6. Ilustrasi Tabel Kruskal-Wallis

Tabel distribusi pasti Kruskal-Wallis dapat ditentukan dengan cara menghitung nilai statistik uji Kruskal Wallis (20) atau (21) pada pembahasan sebelumnya. Penghitungan ini dilakukan untuk semua kemungkinan. Dimana kemungkinan nilai statistik uji Kruskal-Wallis tersebut ditentukan oleh banyaknya keseluruhan pengamatan $N$, masing-masing contoh $n_j$, dan banyaknya susunan peringkat.

Seperti pembahasan sebelumnya, rancangan yang digunakan pada uji Kruskal-Wallis adalah rancangan acak lengkap. Artinya, pengacakan dilakukan pada setiap unit percobaan karena rancangan acak lengkap mengasumsikan bahwa semua unit percobaan dikondisikan homogen. Oleh karenanya, untuk meletakan suatu unit percobaan pada RAL yang keseluruhan pengamatannya $N$ dapat dilakukan $N!$ cara. Oleh karena, setiap contoh memiliki ukuran $n_j$ untuk $j = 1,2,..,k$ dan pada tiap contoh posisi unit percobaan tidak begitu diperhatikan sehingga banyaknya cara meletakkan unit percobana pada RAL adalah $\dfrac{N!}{n_1!n_2!...n_k!}$. Keadaan ini analog dengan penyusunan peringkat Kruskal-Wallis untuk menggantikan data pengamatan pada RAL. Dengan demikian banyaknya susunan peringkat (BSP) Kruskall-Walis adalah

$$BSP = \frac{N!}{n_1!n_2!...n_k!} \tag{25}$$

Pengilustrasian Tabel Distribusi Pasti Kruskal-Wallis dilakukan dengan pengambilan contoh, yaitu untuk $k = 3$ dan $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, dan $n_2 = 1$. Sehungga diperoleh banyaknya susunan peringkat

$$\begin{aligned} BSP &= \frac{4!}{2!1!1!} \\ &= \frac{24}{2} \\ &= 12 \end{aligned}$$

Karena diketahui $N = 4$, sehingga peringkat data pengamatan adalah 1, 2, 3, dan 4. Peringkat-peringkat ini akan diatur posisinya pada Tabel Layout peringkat uji Kruskal-Wallis.

Dari seluruh perhitungan di atas, diperoleh tiga jenis nilai statistik uji Kruskal-Wallis $H$, yaitu 0.3, 1,8, dan 2.7. Rincian banyaknya masing-masing nilai statistik uji tersebut berturut-turut 2,4, dan 6. Sedangkan, banyaknya seluruh kemungkinan adalah 12 dan peluang satu kemungkinan nilai $H$ adalah $\dfrac{1}{12}$. Oleh karena itu, diperoleh $P(H = 0.3) = \dfrac{2}{12}$, $P(H = 1.8) = \dfrac{4}{12}$, dan $P(H = 2.7) = \dfrac{6}{12}$, keadaan ini dirangkum pada Tabel 4 berikut:

**Tabel 4. Tabel Distribusi Pasti Kruskal-Wallis untuk $n_1 = 2$, $n_2 = 1$, dan $n_3 = 1$**

| No. | $h$ | Banyaknya | $P(H = h)$ | $P(H \leq h)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1. | 0.3 | 2 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| 2. | 1.8 | 4 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| 3. | 2.7 | 6 | $\frac{1}{2}$ | 1 |

## 7. Teladan Penerapan

Teladan yang diberikan untuk melakukan pengujian menggunakan beberapa uji yang dibahas sebelumnya diperoleh dengan membangkitkan data dengan Microsoft Excel. Data yang dibangkitkan ada dua jenis, yaitu data yang berdistribusi normal (Tabel 5) dan data yang tidak berdistribusi normal (Tabel 6).

Dari data yang diperoleh dengan simulasi banyaknya kolom diasumsikan sebagai banyaknya contoh yang diamati, sedangkan banyaknya baris diasumsikan sebagai banyaknya ulangan pengamatan. Data yang terbentuk diasumsikan sebagai data pada rancangan acak lengkap dimana pengacakan dilakukan pada masing-masing unit percobaan.

**Tabel 5. Data Berdistribusi Normal**

| | | Contoh | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Ulangan | 1 | 14.8084 | 12.3036 | 13.6865 | 20.5510 | 17.0229 |
| | 2 | 14.0424 | 4.6337 | 7.8760 | 11.6195 | 22.6061 |
| | 3 | 12.2848 | 12.5954 | 13.4764 | 10.6300 | 17.9109 |
| | 4 | 3.4206 | 3.4206 | 7.8448 | 3.4206 | 23.3193 |
| | 5 | 9.2362 | 4.6337 | 3.4206 | 18.1389 | 20.6429 |
| | 6 | 12.0231 | 3.0939 | 13.0455 | 10.5185 | 15.5846 |
| | 7 | 8.4450 | 4.1543 | 16.1139 | 10.3568 | 22.8786 |
| | 8 | 12.5530 | 9.7360 | 14.0363 | 7.4271 | 13.4107 |
| | 9 | 12.7105 | 12.1027 | 8.0149 | 16.0948 | 22.2995 |
| | 10 | 15.5391 | 9.8490 | 7.5093 | 10.3298 | 18.5987 |

**Tabel 6. Data Tidak Berdistribusi Normal (Seragam Kontinu)**

| | | Contoh | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Ulangan | 1 | 14.9422 | 8.1876 | 24.6975 | 11.3458 | 17.5744 |
| | 2 | 12.4958 | 13.7802 | 30.6377 | 11.7547 | 16.8859 |
| | 3 | 16.5995 | 9.8006 | 32.5382 | 17.1702 | 30.9165 |
| | 4 | 11.3458 | 12.0977 | 28.9655 | 12.0758 | 21.5738 |
| | 5 | 13.0667 | 11.3458 | 44.3898 | 10.6489 | 28.4097 |
| | 6 | 12.8663 | 18.9577 | 24.3064 | 11.0211 | 34.2026 |
| | 7 | 12.1797 | 10.2522 | 24.8387 | 13.4345 | 17.5016 |
| | 8 | 12.7576 | 17.8121 | 26.4623 | 15.8955 | 19.3671 |
| | 9 | 10.7978 | 19.0669 | 28.9906 | 12.0828 | 42.1659 |
| | 10 | 14.4900 | 8.7159 | 37.2598 | 13.5037 | 12.8297 |

Hasil perhitungan uji parametrik data normal dapat dirangkum dalam ANAVA Satu Arah pada Tabel 7 berikut

**Tabel 7. ANAVA Satu Arah Data Normal**

| Sumber Keragaman | Derajat Bebas | Jumlah Kuadrat | Kuadrat Tengah | *NHKT* | $F$ - hitung | Nilai- $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Perlakuan | 4 | 763.6510 | 190.9128 | $\sigma_\varepsilon^2 + \frac{5}{2}\sum_{j=1}^{k}\tau_j^2$ | 11.4833 | $2\times10^{-6}$ |
| Galat | 45 | 748.1343 | 16.6252 | $\sigma_\varepsilon^2$ | | |
| Total | 49 | 1511.7853 | | | | |

Jika taraf nyata pengujian ditetapkan $\alpha = 0.05$, maka hipotesis nol ditolak karena nilai-$p$ jauh lebih kecil dari $\alpha = 0.05$. Keputusan dapat juga diambil dengan cara membandingkan nilai $F$ yang diperoleh dari perhitungan di atas dengan $F$ teoritis dengan derajat bebas $v_1 = 4$ dan $v_2 = 45$ dan taraf nyata $\alpha = 0.05$. Nilai $F$ teoritis ini adalah $F_{(0.05;4,45)} = 2.5787$. Karena $F$ hasil perhitungan lebih besar dari $F_{(0.05;4,45)}$, hipotesis nol juga ditolak. Artinya, terdapat pengaruh perlakuan pada data pertama.

Hasil perhitungan data seragam kontinu di atas dapat dirangkum dalam ANAVA Satu Arah pada Tabel 8 berikut

**Tabel 8. ANAVA Satu Arah Data Seragam Kontinu**

| Sumber Keragaman | Derajat Bebas | Jumlah Kuadrat | Kuadrat Tengah | *NHKT* | $F$ - hitung | Nilai- $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Perlakuan | 4 | 763.6510 | 653.3232 | $\sigma_\varepsilon^2 + \frac{5}{2}\sum_{j=1}^{k}\tau_j^2$ | 21.2636 | $<<0.000001$ |
| Galat | 45 | 1382.6224 | 30.7249 | $\sigma_\varepsilon^2$ | | |
| Total | 49 | 3995.9151 | | | | |

Jika taraf nyata pengujian ditetapkan $\alpha = 0.05$, maka hipotesis nol ditolak karena nilai-$p$ jauh lebih kecil dari $\alpha = 0.05$. Keputusan dapat juga diambil dengan cara membandingkan nilai $F$ yang diperoleh dari perhitungan di atas dengan $F$ teoritis dengan derajat bebas $v_1 = 4$ dan $v_2 = 45$ dan taraf nyata $\alpha = 0.05$. Nilai $F$ teoritis ini adalah $F_{(0.05;4,45)} = 2.5787$. Karena $F$ hasil perhitungan lebih besar dari $F_{(0.05;4,45)}$, hipotesis nol juga ditolak. Artinya, juga terdapat pengaruh perlakuan pada data kedua atau pengaruh perlakuannya tidak tetap.

Kemudian, untuk kedua data teladan di atas dihitung satatistik uji Median $T$ dengan (15), Kruskal-Wallis $H$ dengan (21), dan Bell-Doksum $T_2$ dengan (24). Rangkuman hasilnya dapat dilihat pada Tabel 9 berikut

**Tabel 9. Rangkuman Hasil Uji Nonparametrik**

| Data | $T$ | $\hat{\alpha}$ | $H$ | $\hat{\alpha}$ | $T_2$ | $\hat{\alpha}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Normal | 15.2 | 0.00430 | 22.82 | $1.4\times10^{-4}$ | 27.73 | $1.4\times10^{-5}$ |
| Seragam Kontinu | 28 | 0.00001 | 31.31 | $2.6\times10^{-6}$ | 31.75 | $2.2\times10^{-6}$ |
| | | | | | | |

Nilai statistik uji untuk kedua data di atas dibandingkan dengan distribusi kai-kuadrat $\chi^2_{0.05;4} = 9.4877$. Dengan demikian, hipotesis nol ditolak untuk masing-masing pengujian baik data normal maupun data seragam kontinu, karena nilai statistik uji untuk masing-masing data lebih besar dari $\chi^2_{0.05;4} = 9.4877$. Dengan demikan, untuk data normal maupun data seragam kontinu terdapat pengaruh perlakuan.

## 8. Kesimpulan

Dari pengkajian dalam penelitian ini dapat disimpulkan bahwa untuk teladan data normal pada penelitian ini, uji $F$, uji Median, uji Kruskal, dan uji Bell-Doksum memperlihatkan hasil yang sama, yaitu menolak hipotesis nol dengan taraf nyata berturut-turut $2\times10^{-6}$, $4.3\times10^{-4}$, $1.4\times10^{-4}$, dan $1.4\times10^{-5}$. Artinya, uji Bell-Doksum lebih mampu mendekati uji $F$ untuk data normal. Sedangkan uji Kruskal-Wallis juga dapat menghampiri uji $F$, tetapi tidak sebaik uji Bell-Doksum melainkan nilainya hampir sama dengan uji Median.

Sedangkan, untuk teladan data seragam kontinu uji $F$, uji Median, uji Kruskal, dan uji Bell-Doksum, juga memperlihatkan hasil yang sama, yaitu menolak hipotesis nol dengan taraf nyata secara terurut adalah $<<1\times10^{-7}$, $1\times10^{-5}$, $2.6\times10^{-6}$ $2.2\times10^{-6}$. Namun, taraf nyata untuk uji $F$ sangat jauh berbeda, menunjukkan uji $F$ tidak cukup baik digunakan untuk data tidak normal. Sedangkan uji Bell-Doksum memperlihatkan hasil yang lebih baik dibanding dua uji nonparametrik lainnya.

## 9. Daftar Pustaka


**Anonim.** 2007**.** *Berbagai Jenis rancanga Percobaan*. http://gesaf.files.wordpress.com/2008/07/berbagai-jenis-rancangan-percobaan.pdf

**Conover, W.J.** 1971. *Pratical Nonparametric Statistics***.** Wiley International Edition, John Wiley & Sons, New York

**Dajan, A.** 1996. *Pengantar Metode Statistik, Jilid II*. LP3ES, Jakarta

**Daniel, W.W.** 1989. *Statistika Nonparametrik Terapan*. Edisi Terjemahan, Penerbit PT Gramedia, Jakarta

**Dudewicz, E.J. dan S.N. Mishra**. 1995. *Statistika Matematika Modern*. Penerbit ITB Bandung, Bandung

**Gibbons, J.D.** 1985. *Nonparametric Statistic Inference, 2nd ed*. Marcel Dekker, New York

**Gibbons., J.D. dan S. Chakraborti.** 2003. *Nonparametric Statistic Inference, 4nd ed*. Marcel Dekker, New York

**Herawati, N.** 2007**.** *Rancangan Percobaan***.** http://lemlit.unila.ac.id/file/data%20lama/makalah%20pdf/BAHANMETODOL.DOSEN.pdf

**Hinkelmann, K. dan O. Kempthore.** 2008. *Design and Analysis of Experiment Volume 1, Introduction to Experimental Design, Second Edition*. Wiley-Interscience A John Wiley & Sons Inc., Publication, New Jersey

**Lentner, M. dan T. Bishop**. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valley Book Company, Blackburg

**Mattjik, A.A. dan Sumertajaja, M.** 2000. *Rancangan Percobaan dengan Aplikasi SAS dan MINITAB Jilid 1*. IPB-Press, Bogor

**Murti, B**. 1996. *Penerapan Metode Statistik Nonparametrik dalam Ilmu-Ilmu Kesehatan*. Penerbit PT Gramedia, Jakarta

**Nugroho, S.**. 2008. *Metode Statistik Nonparametrik*. UNIB-Press, Bengkulu

**Randles, R. H. dan D. A. Wolf**. 1979. *Introduction to The Theory of Nonparametric Statistics*. Jhon Wiley and Sons

**Siegel, S. and N. J. Catellan, Jr.** 1988. *Nonparametric Statistics for The Behavioral Science, 2nd ed*. McGraw-Hill International Edition, McGraw-Hill Book Company, Singapore

**Sprent, P.** 2001. *Applied Nonparametric Statistical Methods*. CRC Press LLC, USA

**Tambunan, T**. 2008. *Statistik Nonparametrik*. http://rumahbelajarpsikologi.com/index.php/nonpar.html

**Weiss, N. A**. 2002. *Elementary Statistics 5th ed*. Pearson Education Inc. New York