RANCANGAN ACAK LENGKAP DENGAN SUBSAMPEL

Etis Sunandi[1], Sigit Nugroho[2], dan Jose Rizal[2]
1 Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu
2 Staf Pengajar Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRACT

In the Completely Randomized Design, the number of Experimental Unit (EU) is not limited. Sometimes, EU is not easy to be measured or to be observed. This situation can be handled by using the Completely Randomized Design with subsampling.

This research studies procedure of ANOVA (Analysis of Variance) in the case of : (1) unequal numbers of EU per treatment, but a constant number of sampling units for each EU, (2) an equal number or EU per treatment, but an unequal numbers of sampling units per EU, and (3) unequal numbers of EU per treatment and unequal numbers of sampling units per EU.

The result shows that procedure of ANOVA for all of the three cases are different. Furthermore, the second and third case have similar forms in term of their expected means squares.

Keyword : *Completely Randomized Design with subsampling, unequal, treatment, sampling units, ANOVA, Satterthwaites procedure*

1. Pendahuluan

Percobaan merupakan salah satu cara untuk menemukan sesuatu. Percobaan sering dirancang untuk meneliti satu atau lebih populasi. Suatu kondisi yang mencirikan sebuah populasi disebut perlakuan (Sriliana, 2007).

Rancangan percobaan merupakan bagian dari rancangan penelitian ilmiah. Rancangan percobaan dikenal juga sebagai rancangan lapangan. Jenis-jenis rancangan lapangan yang biasanya digunakan adalah Rancangan Acak Lengkap, Rancangan Kelompok Acak Lengkap, Rancangan Persegi Latin, dan Rancangan Persegi Latin Graeco (Lentner & Bishop, 1986).

Rancangan Acak Lengkap adalah rancangan lapangan pada suatu lokasi yang homogen. Rancangan ini dikatakan acak karena setiap satuan percobaan mempunyai peluang yang sama untuk mendapatkan perlakuan sedangkan dikatakan lengkap karena seluruh perlakuan yang dirancang dalam percobaan tersebut digunakan. (Lentner & Bishop, 1986). Analisis dalam Rancangan Acak Lengkap ini dapat dilakukan dengan mudah dan langsung.

Dalam Rancangan Acak Lengkap, banyaknya satuan percobaan tidak dibatasi. Namun dalam beberapa situasi, dimungkinkan ketidakpraktisan untuk mengukur atau mengamati keseluruhan satuan percobaan. Oleh karena itu, upaya yang dapat dilakukan untuk menanggulangi hal tersebut menggunakan Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel.

Ketidaksamaan jumlah data tiap perlakuan dan unit sampel dapat terjadi dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel. Ketidaksamaan ini dimungkinkan terjadi karena adanya data yang hilang atau jumlah ulangan yang berbeda.

Menurut Lentner dan Bishop (1986) kemungkinan ketidaksamaan kasus data pengamatan yang akan ditemui antara lain : (1) ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama, (2) ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama, dan (3) ketidaksamaan jumlah unit sampel dan ulangan. Dari tiga kasus tersebut dimungkinkan mempunyai tabel ANAVA yang berbeda satu dengan lainnya.

Berdasarkan hal tersebut, penulis tertarik untuk mempelajari dan membahas prosedur ANAVA dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada 3 kasus yang berlainan, seperti tersebut di atas.

2. Landasan Teori

2.1 Rancangan Acak Lengkap (RAL)

Rancangan Acak Lengkap adalah rancangan lapangan dimana seluruh satuan percobaan homogen. (Lentner & Bishop, 1986).

RAL merupakan rancangan yang paling sederhana jika dibandingkan dengan rancangan-rancangan lainnya. Dalam rancangan ini sumber keragaman yang diamati hanya perlakuan dan galat. Oleh karena itu, RAL umumnya cocok digunakan untuk kondisi lingkungan, alat, dan media yang homogen (Hanafiah, 2000).

2.1.1 Kelebihan dan Kelemahan dari RAL

Menurut Lentner dan Bishop (1986), kelebihan dari Rancangan Acak Lengkap adalah sebagai berikut:

a. *Fleksibel*. Disesuaikan dengan sumber keragaman yang ada dan tidak ada batasan antara jumlah perlakuan atau ulangan.
b. *Mudah dianalisis*. Dari semua rancangan lapangan, RAL adalah rancangan yang paling mudah dalam analisisnya, walaupun dalam keadaan jumlah ulangan dan perlakuan tidak sama.
c. *Derajat bebas estimasi maksimum terdapat pada error*. Ini berlaku hanya untuk percobaan-percobaan kecil atau untuk pengamatan dimana variasi luar besar.

Sedangkan kelemahan dari Rancangan Acak Lengkap adalah relatif tidak efesien bila ada rancangan yang lebih tepat untuk digunakan. Hal ini bersumber dari fakta bahwa semua keragaman yang tidak diketahui (serta keragaman faktor luar yang dapat dikendalikan) tercakup dalam galat percobaan (Nugroho, 2008).

2.1.2 Model Linier dan Asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap terdiri dari t perlakuan dan r_i ulangan adalah sebagai berikut (Montgomery, 1976):

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}; \quad i = 1,2,...,t \qquad j = 1,2,...,r_i \tag{1}$$

Keterangan:

Y_{ij} $= pengamatan\ pada\ perlakuan\ ke\text{-}i\ dalam\ ulangan\ ke\text{-}j$

μ $= rataan\ umum$

τ_i $= perlakuan\ ke\text{-}i$

ε_{ij} $= komponen\ galat$

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ untuk setiap i, j.

b. ε_{ij} dan τ_i saling bebas

c. $\sum_i \tau_i r_i = 0$

d. μ adalah konstanta tetap

2.1.3 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap

Pada Rancangan Acak Lengkap, data-data percobaan ditabelkan sebagai berikut:

Tabel 2.1 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap

	Perlakuan					
	1	**2**	**…**	***i***	**…**	***t***
	Y_{11}	Y_{21}	…	Y_{i1}	…	Y_{t1}
	Y_{12}	Y_{22}	…	Y_{i2}	…	Y_{t2}
	.	.		.		.
	.	.		.		.
	.	.		.		.
	Y_{1j}	Y_{2j}	…	Y_{ij}	…	Y_{tj}
	.	.		.		.
	.	.		.		.
	.	.		.		.
Total perlakuan	Y_{1r_1}	Y_{2r_2}	…	Y_{ir_i}	…	Y_{tr_t}

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

Total ulangan dan total perlakuan yang diperoleh dari tabel digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Kedua total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\bar{Y}_{i.} = \frac{Y_{i.}}{r_i} = rata\text{-}rata\ perlakuan\ ke\text{-}i$$
$$\bar{Y}_{..} = \frac{Y_{..}}{\sum_{i=1}^{t} r_i} = rataan\ umum \qquad (2)$$

2.1.4 Analisis Varian untuk Rancangan Acak Lengkap

Model RAL terbentuk dari perlakuan dan galat. Sebagai konsekuensinya, Analisa Varian (ANAVA) untuk Rancangan Acak Lengkap hanya mencantumkan suatu sumber keragaman perlakuan dan galat.

Pada ketentuan-ketentuan perhitungan, jumlah kuadrat yang diperlukan untuk sumber keragaman antara lain adalah Jumlah Kuadrat Perlakuan (*JKP*), Jumlah Kuadrat Galat (*JKG*), dan Jumlah Kuadrat Total (*JKT*).

Adapun pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat adalah sebagai berikut:

$$FK = faktor\ koreksi = \frac{Y_{..}^{2}}{\sum_{i=1}^{t} r_i} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t} r_i} \tag{3}$$

Faktor koreksi (*FK*) adalah nilai untuk mengoreksi nilai rata-rata (μ) dan perlakuan (τ) sehingga dalam ANAVA nilai $\mu = 0$ (Hanafiah, 2000).

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij}^2 - FK \tag{4}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(\bar{Y}_{i.} - \bar{Y}_{..}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i.}^2}{r_i} - FK \tag{5}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\left(Y_{ij} - \bar{Y}_{i.}\right)^2 = JKT - JKP \tag{6}$$

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk RAL, sebagai berikut:

Tabel 2.2 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t - 1$	JKP	$KTP = \frac{JKP}{db}$	$\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{t-1}\sum_i r_i\tau_i^2$
Galat	$\sum_{i=1}^{t} r_i - t$	JKG	$KTG = \frac{JKG}{db}$	σ_ε^2
Total	$\sum_{i=1}^{t} r_i - 1$	JKT		

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

2.1.5 Inferensia dalam Model Tetap

Apabila perlakuan ke-i mendefinisikan populasi yang berdistribusi normal dengan rata-rata μ_i dan varian σ_τ^2, biasanya dituliskan dengan $\tau_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_\tau^2\right)$, maka inferensia yang mungkin tentang rata-rata perlakuan salah satunya adalah pengujian kesamaan rata-rata perlakuan secara simultan. Hipotesis pengujiannya adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} &H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_t \\ &H_1 : \text{paling sedikit ada } \mu_i \neq \mu_j, i \neq j = 1, 2, \ldots, t \end{aligned} \tag{7}$$

Yang mana dalam Rancangan Acak Lengkap akan ekivalen dengan

H_0 : semua rata-rata perlakuan adalah sama
H_1 : ada satu pasang rata-rata perlakuan yang tidak sama

Atau dalam bentuk

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_t$$
$$H_1 : \text{paling sedikit ada } \tau_i \neq 0, i = 1, 2, ..., t \tag{8}$$

Statistik hitungnya adalah

$$F_{hit} = \frac{Kuadrat\ Tengah\ Perlakuan(KTP)}{Kuadrat\ Tengah\ Galat\left(KTG\right)} \sim F_{(\alpha;dbp;dbg)} \tag{9}$$

Ho ditolak jika $F_{hit} > F_{(\alpha;dbp;dbg)}$, yang berarti ada pengaruh dari perlakuan terhadap pengamatan.

2.2 Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel

Dalam sebuah Rancangan Acak Lengkap pengukuran dan analisis dilakukan untuk setiap satuan percobaan. Namun, dalam beberapa situasi, dimungkinkan ketidakpraktisan untuk mengukur atau mengamati keseluruhan satuan percobaan sehingga diperlukan penarikan sampel satuan percobaan atau disebut dengan unit sampel. Pengamatan dari rancangan dihitung menurut unit sampel. Rancangan ini disebut Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel. (Lentner & Bishop, 1986).

Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel mempunyai kelebihan yang sama dengan Rancangan Acak Lengkap dan lebih efisien dalam pengukuran dan analisis.

Sedangkan kelemahannya adalah bertambahnya galat dikarenakan adanya galat sampel yang diambil dan juga jika ada rancangan lain yang lebih cocok digunakan dalam sebuah penelitian maka Rancangan Acak Lengkap Dengan subsampel tidak efisian digunakan pada rancangan tersebut.

2.2.1 Model Linier dan Asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel terdiri dari t perlakuan, s unit sampel, dan r ulangan adalah sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk}; \quad i = 1,2,...,t \qquad j = 1,2,...,r\ , \quad k = 1,2,...,s \tag{10}$$

Keterangan :

Y_{ijk} = *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam perulangan ke - j dan pada unit sampel ke - k*

μ = *rataan umum*

τ_i = *pengaruh perlakuan ke - i*

ε_{ij} = *komponen galat*

δ_{ijk} = *komponen galat sampel*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$ untuk setiap i, j.

b. δ_{ijk} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_\delta^2\right)$ $\forall\ i, j, k$.

c. δ_{ijk} dan ε_{ij} saling bebas.

d. $\sum_{i} \tau_i r_i = 0$

e. μ adalah konstanta tetap.

2.2.2 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel

Pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel, data-data percobaan ditabelkan seperti yang tercantum pada Tabel 2.7.

Tabel 2.7 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel

Perlakuan					
1	**2**	**…**	***I***	**…**	***t***
Y_{111}	Y_{211}	…	Y_{i11}	…	Y_{t11}
Y_{112}	Y_{212}	…	Y_{i12}	…	Y_{t12}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$Y_{11s_{11}}$	$Y_{21s_{21}}$	…	$Y_{i1s_{i1}}$	…	$Y_{t1s_{t1}}$
Y_{121}	Y_{221}	…	Y_{i21}	…	Y_{t21}
Y_{122}	Y_{222}	…	Y_{i22}	…	Y_{t22}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$Y_{12s_{12}}$	$Y_{22s_{22}}$	…	$Y_{i2s_{i2}}$	…	$Y_{t2s_{t2}}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$Y_{1r_1 1}$	$Y_{2r_2 1}$	…	$Y_{ir_i 1}$	…	$Y_{tr_t 1}$
$Y_{1r_1 2}$	$Y_{2r_2 2}$	…	$Y_{ir_i 2}$	…	$Y_{tr_t 2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$Y_{1r_1 s_{1r_1}}$	$Y_{2r_2 s_{2r_2}}$	…	$Y_{ir_i s_{ir_i}}$	…	$Y_{tr_t s_{tr_t}}$

Masing-masing total dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{r} Y_{ij.} \qquad (11)$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..}$$

Keterangan :

$Y_{ij.}$ = *total unit sampel pada perlakuan ke-i dalam ulangan ke-j*

$Y_{i..}$ = *total perlakuan*

$Y_{...}$ = *total keseluruhan*

Total keseluruhan, unit sampel, dan perlakuan yang diperoleh digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Ketiga total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\overline{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{rs} = rata\text{ - }rata\ perlakuan\ ke\text{ - }i$$

$$\overline{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{s} = rata\text{ - }rata\ unit\ sampel\ ke\text{ - }ij \tag{12}$$

$$\overline{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{rst} = rataan\ keseluruhan$$

2.2.3 Analisis Varian untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel

Model Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel terbentuk dari perlakuan, unit sampel, dan galat. Sebagai konsekuensinya, Analisis Varian (ANAVA) untuk Rancangan percobaan Acak Lengkap dengan subsampel hanya mencantumkan sumber keragaman perlakuan, galat, dan galat sampel.

Pada ketentuan-ketentuan perhitungan, jumlah kuadrat yang diperlukan untuk sumber keragaman antara lain adalah Jumlah Kuadrat Perlakuan (*JKP*), Jumlah Kuadrat Galat (*JKG*), Jumlah Kuadrat Galat sampel (*JKS*), dan Jumlah Kuadrat Total (*JKT*).

Adapun pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat dengan jumlah ulangan dan unit sampel sama adalah sebagai berikut:

$$FK = faktor\ koreksi = \frac{Y_{...}^{\ 2}}{rst} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}\right)^2}{rst} \tag{13}$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left(Y_{ijk} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - FK \tag{14}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left(\overline{Y}_{i..} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \frac{1}{sr}\sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^2 - FK \tag{15}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\left(\overline{Y}_{ij.} - \overline{Y}_{...}\right)^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^2 - \frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{t} Y_{i..}^2 \tag{16}$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}(Y_{ijk} - \overline{Y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} Y_{ij.}^2 \tag{17}$$

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel adalah sebagai berikut:

Tabel 2.8 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap Dengan subsampel pada kasus jumlah ulangan dan unit sampel sama

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP = \dfrac{JKP}{db}$	$\sigma_\delta^2 + \alpha\sigma_\varepsilon^2 + rs\phi_\tau^2$
Galat	$t(r-1)$	JKG	$KTG = \dfrac{JKG}{db}$	$\sigma_\delta^2 + \beta\sigma_\varepsilon^2$
Galat sampel	$tr(s\text{-}1)$	JKS	$KTS = \dfrac{JKS}{db}$	σ_δ^2
Total	$n-1$	JKT		

Sumber: Lentner & Bishop, 1986

Keterangan : $\alpha = \beta = s$

2.2.4 Inferensia dalam Model Tetap

Prosedur pengujian hipotesis pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel sama dengan Rancangan Acak Lengkap, yakni ketika $\alpha = \beta$ (dalam tabel 2.8). Namun, ada kasus yang menyebabkan $\alpha \neq \beta$, berarti tidak ada uji yang pasti mengenai uji pengaruh perlakuan. Untuk ini, dilakukan pendekatan pengujian dengan menggunakan *Prosedur Satterthwaites*.

2.2.5 Prosedur Satterthwaites

Dalam sebuah pengamatan, kadang-kadang ANAVA tidak dapat membuktikan uji pasti untuk beberapa model parameter, seperti halnya pada ANAVA Rancangan Acan Lengkap dengan subsampel pada kasus ke-2 dan 3.

Satterthwaites telah merancang prosedur pendekatan yang dapat memberikan pengujian pada ANAVA tertentu (Seperti RAL dengan subsampel pada kasus 2 dan 3). Pada dasarnya, penyebab utama timbulnya prosedur Satterthwaites karena adanya ketidaksamaan koefesien pada nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat. Pada prinsipnya, prosedur Satterthwaites adalah sederhana, hanya menambah kuadrat tengah ***maya*** sehingga kedua kuadrat tengah tersebut mempunyai nilai harapan yang sama dalam hipotesis nol. Satu hal yang perlu diperhatikan bahwa salah satu atau kedua kuadrat tengah tersebut dapat dibentuk kuadrat tengah tiruan.

Misalkan $KT_1 + KT_2 + ... + KT_n$ merupakan kuadrat tengah lain dalam tabel ANAVA. Kuadrat tengah maya (KTM) dibentuk dari kombinasi linier KT_i, untuk *i= 1, 2, ..., n*

$$KTM = a_1 KT_1 + a_2 KT_2 + ... + a_n KT_n \tag{18}$$

Dimana $a_1, a_2, ..., a_n$, $a_i \geq 0$ kontanta sehingga KTM mempunyai nilai harapan yang diinginkan. Derajat bebas untuk KTM adalah

$$dbM = \frac{KTM^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i KT_i)^2}{dbi}} \tag{19}$$

Dimana :
dbM = Derajat Bebas Maya
KTM = Kuadrat Tengah Maya
a_i = Koefisien Kuadrat Tengah ke-i
KT_i = Kuadrat Tengah ke-i
dbi = Derajat Bebas ke-i

2.3 Sifat-sifat Peubah Acak

2.3.1 Nilai Harapan

Nilai harapan dalam matematika dinotasikan dengan E (peubah acak tertentu)**.** Misalkan, suatu peubah acak *X* dengan kepekatan peluang *f(x)* mempunyai nilai harapan *E(X)*, yang diperoleh dari

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xf(x), \text{ bila X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x), \text{ bila X kontinu} \end{cases} \tag{20}$$

Misalkan *X* suatu peubah acak dengan kepekatan peluang *f(x)* dan *g(x)* adalah fungsi dari *x*. Nilai harapan *g(X)* adalah

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_x g(x)f(x), \text{ bila X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x), \text{ bila X kontinu} \end{cases} \tag{21}$$

Jika *X* dan *Y* peubah acak dengan peluang kepekatan gabungan *f(x,y),* maka nilai harapan *g(X,Y)* adalah

$$E[g(X,Y)] = \begin{cases} \sum_x \sum_y g(x,y)f(x,y), \text{ bila X diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y), \text{ bila X kontinu} \end{cases} \tag{22}$$

Dalam perhitungan dimungkinkan adanya penyederhanaan nilai harapan. Hal ini dilakukan bila menggunakan sifat-sifat nilai harapan. Menurut Walpole dan Myers tahun 1986, adapun sifat-sifatnya adalah sebagai berikut :

- Jika a dan b tetapan, maka *E(aX + b) = a E(X) + b*
  - Akibat 1 : jika *a = 0,* maka *E(b) = b*
  - Akibat 2 : jika *b = 0*, maka *E(aX) = a E(X)*
- Nilai harapan jumlah dua fungsi atau lebih suatu peubah acak *X* sama dengan jumlah atau selisih nilai harapan masing-masing fungsi tersebut, yaitu
  $$E[g(X) \pm h(X) \pm ... \pm m(X)] = E[g(X)] \pm E[h(X)] \pm ... \pm E[m(X)]$$
- Nilai harapan jumlah dua fungsi atau lebih suatu peubah acak X,Y sama dengan jumlah atau selisih nilai harapan masing-masing fungsi tersebut, yaitu

$$E\left[g(X,Y)\pm h(X,Y)\pm\ldots\pm m(X,Y)\right]=E\left[g\left(X,Y\right)\right]\pm E\left[h\left(X,Y\right)\right]\pm\ldots\pm E\left[m\left(X,Y\right)\right]$$

- Akibat : jika dipilih *g(X,Y) = X*, dan *h(X,Y) = Y* maka diperoleh

$$E\left[X\pm Y\right]=E\left[X\right]\pm E\left[Y\right]$$

- Misalkan *X* dan *Y* dua peubah acak yang saling Bebas, nilai harapannya adalah

$$E(XY) = E(X)\,E(Y)$$

  Generalisasi sifat di atas dimungkinkan dapat dibuat untuk lebih dari dua peubah acak.

2.3.2 Varian

Menurut Walpole tahun 1995 definisi varian dengan peubah acak X adalah jumlah kuadrat dari selisih data dengan nilai tengah peubah acak tersebut, biasanya dinotasikan sebagai berikut :

$$\operatorname{var}(X)=\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{n} \tag{23}$$

Adapun sifat-sifat varian menurut Nugroho(2006) adalah

- Jika X adalah peubah acak, maka $\operatorname{var}(X)=E\left(X^2\right)-\mu^2$, μ adalah rata-rata X
- Jika X peubah acak, dengan a dan b adalah konstanta, maka

$$\operatorname{var}(aX+b)=a^2\operatorname{var}(X)$$

- Jika X dan Y adalah peubah acak dengan fungsi kepekatan bersama f(x,y), maka

$$\operatorname{var}(X+Y)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

- Jika X dan Y saling bebas dengan a dan b konstanta, maka

$$\operatorname{var}(X\pm Y)=\operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)$$

$$\operatorname{var}\left(aX\pm bY\right)=a^2\operatorname{var}(X)+b^2\operatorname{var}(Y)$$

2.3.3 Estimasi rata-rata dan varian

Bilamana memilih model peluang, perlu diperoleh mean (rata-rata) dan varian (ragam). Namun, biasanya nilai rata-rata dan varian populasi ini tidak diketahui, tetapi dapat diestimasi atau diduga berdasarkan suatu contoh acak. Teknik secara umum digunakan beberapa sifat nilai harapan.

Misalkan X_1, ..., X_n melambangkan sampel acak dari suatu populasi dengan fungsi kepekatan peluang *f(x)*. Suatu fungsi sampel acak yang tidak tergantung dengan sembarang parameter yang tak diketahui disebut dengan *statistik*. Salah satu statistik sampel yang penting adalah rata-rata sampel, yang tidak lain adalah rata-rata peubah dalam sampel acak, dan dinotasikan dengan

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n} \tag{24}$$

Statistik $\bar{X}$ adalah peubah acak. Jika suatu sampel benar-benar diamati, maka nilai amatan dari $\bar{X}$ biasanya dinotasikan dengan $\bar{x}$. Nilai ini berguna sebagai penduga bagi rata-rata populasi, $\mu = E(X)$

Nugroho (2006) menyatakan suatu penduga $\hat{\theta}$ dikatakan sebagai penduga tak bias dari parameter θ jika E($\hat{\theta}$) = θ. Berdasarkan definisi ini, maka $\bar{x}$ merupakan penduga tak bias bagi μ untuk setiap fungsi kepekatan dimana rata-ratanya ada. Sifat berikutnya mengindikasikan bahwa ragam dari $\bar{X}$ menjadi kecil, bilamana n membesar, sehingga untuk ukuran sampel yang besar, nilai amatan $\bar{x}$ biasanya akan memberikan nilai dugaan yang sangat dekat dengan μ untuk n yang sangat besar.

Jika rata-rata populasi μ diketahui dan σ^2 tak diketahui, maka penduga alami bagi $\sigma^2 = E(X-\mu)^2$ adalah

$$V = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \mu\right)^2}{n} \tag{25}$$

Karena σ^2 merupakan rata-rata dari $(X-\mu)^2$. Sudah tentu, secara mudah dapat ditunjukkan bahwa E(V) = σ^2.

Dalam kebanyakan kasus, tidak dimungkinkan untuk mendapatkan nilai rata-rata populasi, μ, bilamana σ^2 tak diketahui, yang akan menghasilkan penduga

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n} \tag{26}$$

Namun, penduga di atas bukan merupakan penduga tak bias bagi ragam populasi, σ^{-2}. Untuk itu, sebagai penduga tak bias baginya, digunakan

$$\hat{\sigma}_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}{n-1} \tag{27}$$

yang merupakan modifikasi dari penduga biasnya.

3. Rancangan Acak Lengkap dengan Subsampel pada Kasus Ketidaksamaan Jumlah Ulangan tetapi Jumlah Unit Sampel Sama

3.1 Model linier dan asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama terdiri dari t perlakuan, s unit sampel, dan r_i ulangan adalah sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk};\quad i = 1,2,...,t \qquad j = 1,2,...,r_i,\quad k = 1,2,...,s \tag{28}$$

dimana:

Y_{ijk} = *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam perulangan ke - j dan pada unit sampel ke - k*

μ = *rataan umum*

τ_i = *pengaruh perlakuan ke - i*

ε_{ij} = *komponen galat*

δ_{ijk} = *komponen galat sampel*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$ untuk setiap i, j.
b. δ_{ijk} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N\left(0,\sigma_\delta^2\right)$ untuk setiap i, j, k.
c. $\sum_i \tau_i r_i = 0$
d. μ adalah konstanta tetap
e. ε_{ij} dan δ_{ijk} saling bebas

3.2 Layout Data

Dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama data-data yang diperoleh, disusun dalam layout seperti di bawah ini:

Tabel 3.1 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama

Perlakuan					
1	**2**	**...**	***i***	**...**	***t***
Y_{111}	Y_{211}	$\cdots$	Y_{i11}	$\cdots$	Y_{t11}
Y_{112}	Y_{212}	$\cdots$	Y_{i12}	$\cdots$	Y_{t12}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_{11s}	Y_{21s}	$\cdots$	Y_{i1s}	$\cdots$	Y_{t1s}
Y_{121}	Y_{221}	$\cdots$	Y_{i21}	$\cdots$	Y_{t21}
Y_{122}	Y_{222}	$\cdots$	Y_{i22}	$\cdots$	Y_{t22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_{12s}	Y_{22s}	$\cdots$	Y_{i2s}	$\cdots$	Y_{t2s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1 1}$	$Y_{2r_2 1}$	$\cdots$	$Y_{ir_i 1}$	$\cdots$	$Y_{tr_t 1}$
$Y_{1r_1 2}$	$Y_{2r_2 2}$	$\cdots$	$Y_{ir_i 2}$	$\cdots$	$Y_{tr_t 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1 s}$	$Y_{2r_2 s}$	$\cdots$	$Y_{ir_i s}$	$\cdots$	$Y_{tr_t s}$

masing-masing total dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{s} Y_{ijk} = s\mu + s\tau_i + s\varepsilon_{ij} + \delta_{ij.} \qquad (29)$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.} = r_i s\mu + r_i s\tau_i + s\varepsilon_{i.} + \delta_{i..} \qquad (30)$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..} = \sum_{i=1}^{t} r_i s\mu + s\sum_{i=1}^{t} r_i\tau_i + s\varepsilon_{..} + \delta_{...} \qquad (31)$$

dimana :

$Y_{ij.}$ = *total unit sampel pada perlakuan ke-i dalam ulangan ke-j*

$Y_{i..}$ = *total perlakuan*

$Y_{...} = total\ keseluruhan$

Total ulangan, unit sampel dan perlakuan yang diperoleh digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Ketiga total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\bar{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{s} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \bar{\delta}_{ij.} \quad (32)$$

$$\bar{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{r_i s} = \mu + \tau_i + \bar{\varepsilon}_{i.} + \bar{\delta}_{i..} \quad (33)$$

$$\bar{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{\sum_{i=1}^{t} r_i s} = \mu + \frac{\sum_{i=1}^{t} r_i \tau_i}{\sum_{i=1}^{t} r_i} + \bar{\varepsilon}_{..} + \bar{\delta}_{...} \quad (34)$$

dimana :

$\bar{Y}_{i..} =\ rata\text{-}rata\ perlakuan\ ke\text{-}i$

$\bar{Y}_{ij.} = rata\text{-}rata\ unit\ sampel\ ke\text{-}ij$

$\bar{Y}_{...} = rataan\ keseluruhan$

3.3 Analisis Varian

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat dengan ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi unit sampel sama adalah sebagai berikut:

$$FK = \text{faktor koreksi} = \frac{Y_{...}^2}{s\sum_{i=1}^{t} r_i} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{i=1=}^{s} Y_{ijk}\right)^2}{s\sum_{i=1}^{t} r_i} \quad (35)$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - FK \quad (36)$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s}\left(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{r_i} - FK \quad (39)$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s}\left(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.}^2 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{r_i} \quad (40)$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s} Y_{ijk}^2 - \frac{1}{s}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.}^2 \quad (41)$$

Derajat bebas untuk perlakuan adalah banyaknya perlakuan dikurangi satu *(t-1)*, galat $\sum_{i=1}^{t} r_i - t$, galat sampel $s\sum_{i=1}^{t} r_i - \sum_{i=1}^{t} r_i$, dan total $s\sum_{i=1}^{t} r_i - 1$. Pencarian kuadrat tengah dari masing-masing sumber keragaman ditentukan dengan membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebas masing-masing.

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel adalah sebagai berikut:

Tabel 3.2 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel Pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan tetapi jumlah unit sampel sama

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP=\frac{JKP}{db}$	$\sigma_\delta^2+\varphi\sigma_\varepsilon^2+\kappa$
Galat	$\sum_{i=1}^{t} r_i - t$	JKG	$KTG=\frac{JKG}{db}$	$\sigma_\delta^2+\theta\sigma_\varepsilon^2$
Galat sampel	$\sum_{i1=}^{t} r_i(s-1)$	JKS	$KTS=\frac{JKS}{db}$	σ_δ^2
Total	$n-1$	JKT		

dengan $\kappa=\dfrac{s\sum_{i=1}^{t} r_i\tau_i^2}{t-1}$, dan $\varphi=\theta=s$

4. Rancangan Acak Lengkap dengan Subsampel pada Kasus Ketidaksamaan Jumlah Unit Sampel tetapi Jumlah Ulangan Sama

4.1 Model linier dan asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama terdiri dari t perlakuan, s_{ij} unit sampel, dan r ulangan adalah sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ijk}=\mu+\tau_i+\varepsilon_{ij}+\delta_{ijk};\;\; i=1,2,...,t \qquad j=1,2,...,r\,, \quad k=1,2,...,s_{ij} \tag{42}$$

dimana:

Y_{ijk} = *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam perulangan ke - j dan pada unit sampel ke - k*

μ = *rataan umum*

τ_i = *pengaruh perlakuan ke - i*

ε_{ij} = *komponen galat*

δ_{ijk} = *komponen galat sampel*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $\mathrm{N}\left(0,\sigma_\varepsilon^2\right)$ untuk setiap i, j.

b. δ_{ijk} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $\mathrm{N}\left(0,\sigma_\delta^2\right)$ untuk setiap i, j, k.

c. $r\sum_i \tau_i=0$

d. μ adalah konstanta tetap

e. ε_{ij} dan δ_{ijk} saling bebas

1.2 Layout Data

Dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama data-data yang diperoleh, disusun dalam layout seperti di bawah ini:

Tabel 4.1 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama

Perlakuan					
1	**2**	**...**	***i***	**...**	***t***
Y_{111}	Y_{211}	$\cdots$	Y_{i11}	$\cdots$	Y_{t11}
Y_{112}	Y_{212}	$\cdots$	Y_{i12}	$\cdots$	Y_{t12}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{11s_{11}}$	$Y_{21s_{2j}}$	$\cdots$	$Y_{i1s_{i1}}$	$\cdots$	$Y_{t1s_{t1}}$
Y_{121}	Y_{221}	$\cdots$	Y_{i21}	$\cdots$	Y_{t21}
Y_{122}	Y_{222}	$\cdots$	Y_{i22}	$\cdots$	Y_{t22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{12s_{12}}$	$Y_{22s_{22}}$	$\cdots$	$Y_{i2s_{i2}}$	$\cdots$	$Y_{t2s_{t2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Y_{1r1}	Y_{2r1}	$\cdots$	Y_{ir1}	$\cdots$	Y_{tr1}
Y_{1r2}	Y_{2r2}	$\cdots$	Y_{ir2}	$\cdots$	Y_{tr2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1rs_{1r}}$	$Y_{2rs_{2r}}$	$\cdots$	$Y_{irs_{ir}}$	$\cdots$	$Y_{trs_{tr}}$

masing-masing total dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk} = s_{ij}\mu + s_{ij}\tau_i + s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{ij.} \tag{43}$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{r} Y_{ij.} = s_{i.}\mu + s_{i.}\tau_i + \sum_{j=1}^{r} s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{i..} \tag{44}$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..} = s_{..}\mu + \sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{...} \tag{45}$$

dimana :

$Y_{ij.}$ = *total unit sampel pada perlakuan ke-i dalam ulangan ke-j*

$Y_{i..}$ = *total perlakuan*

$Y_{...}$ = *total keseluruhan*

Total keseluruhan, unit sampel dan perlakuan yang diperoleh digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Ketiga total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\bar{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{s_{ij}} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \bar{\delta}_{ij.} \tag{46}$$

$$\bar{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{s_{i.}} = \mu + \tau_i + \frac{\sum_{j=1}^{r} s_{ij}\varepsilon_{ij}}{s_{i.}} + \bar{\delta}_{i..} \tag{47}$$

$$\bar{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{s_{..}} = \mu + \frac{\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i}{s_{..}} + \frac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij}\varepsilon_{ij}}{s_{..}} + \bar{\delta}_{...} \tag{48}$$

dimana :

$\bar{Y}_{i..}$ = rata-rata perlakuan ke-*i*

$\bar{Y}_{ij.}$ = rata-rata unit sampel ke-*ij*

$\bar{Y}_{...}$ = rataan keseluruhan

4.3 Analisis Varian

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat dengan ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama adalah sebagai berikut:

$$FK = \text{faktor koreksi} = \frac{Y_{...}^2}{s_{..}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}\right)^2}{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij}} \tag{49}$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}^2 - FK \tag{50}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{s_{i.}} - FK \tag{51}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{Y_{ij.}^2}{s_{ij}} - \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{s_{i.}} \tag{52}$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{Y_{ij.}^2}{s_{ij}} \tag{53}$$

Derajat bebas untuk perlakuan banyaknya perlakuan dikurangi satu *(t-1)*, galat $tr - t$, galat sampel $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij} - tr$, dan total $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij} - 1$. Pencarian kuadrat tengah dari masing-masing sumber keragaman ditentukan dengan membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebas masing-masing.

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk Rancangan acak lengkap dengan subsampel adalah sebagai berikut:

Tabel 4.2 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah unit sampel tetapi jumlah ulangan sama

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP = \dfrac{JKP}{db}$	$\sigma_\delta^2 + \kappa + \varphi\sigma_\varepsilon^2$
Galat	tr - t	JKG	$KTG = \dfrac{JKG}{db}$	$\theta\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\delta^2$
Galat sampel	$\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} s_{ij} - 1$	JKS	$KTS = \dfrac{JKS}{db}$	σ_δ^2
Total	$n-1$	JKT		

dengan

$$\kappa = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i\right)^2}{s_{..}}\right)}{t-1}$$

$$\varphi = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{s_{ij}^2}{s_{..}}\right)}{t-1}$$

$$\theta = \frac{\left(s_{..} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r}\frac{s_{ij}^2}{s_{i.}}\right)}{tr-t}$$

5. Rancangan Acak Lengkap dengan Subsampel pada Kasus Ketidaksamaan Jumlah Ulangan dan Unit Sampel

5.1 Model linier dan asumsi

Model linier untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan ulangan dan unit sampel terdiri dari t perlakuan, s_{ij} unit sampel, dan r_i ulangan adalah sebagai berikut (Lentner & Bishop, 1986):

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \delta_{ijk};\ \ i = 1,2,...,t \quad j = 1,2,...,r_i, \quad k = 1,2,...,s_{ij} \tag{54}$$

dimana:

Y_{ijk} = *pengamatan pada perlakuan ke - i dalam perulangan ke - j dan pada unit sampel ke - k*

μ = *rataan umum*

τ_i = *pengaruh perlakuan ke - i*

ε_{ij} = *komponen galat*

δ_{ijk} = *komponen galat sampel*

Agar inferensia valid, asumsi-asumsi untuk model pengaruh tetap adalah:

a. ε_{ij} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N(0,\sigma_\varepsilon^2)$ untuk setiap i, j.

b. δ_{ijk} menyebar secara bebas dan identik menurut sebaran $N(0,\sigma_\delta^2)$ untuk setiap i, j, k.

c. $\sum_i \tau_i r_i = 0$

d. μ adalah konstanta tetap

e. ε_{ij} dan δ_{ijk} saling bebas

5.2 Layout Data

Dalam Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel data-data yang diperoleh, disusun dalam layout seperti di bawah ini:

Tabel 5.1 Layout Data pada Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel

Perlakuan					
1	**2**	**...**	***i***	**...**	***T***
Y_{111}	Y_{211}	$\cdots$	Y_{i11}	$\cdots$	Y_{t11}
Y_{112}	Y_{212}	$\cdots$	Y_{i12}	$\cdots$	Y_{t12}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{11s_{11}}$	$Y_{21s_{21}}$	$\cdots$	$Y_{i1s_{i1}}$	$\cdots$	$Y_{t1s_{t1}}$
Y_{121}	Y_{221}	$\cdots$	Y_{i21}	$\cdots$	Y_{t21}
Y_{122}	Y_{222}	$\cdots$	Y_{i22}	$\cdots$	Y_{t22}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{12s_{12}}$	$Y_{22s_{22}}$	$\cdots$	$Y_{i2s_{i2}}$	$\cdots$	$Y_{t2s_{t2}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1 1}$	$Y_{2r_2 1}$	$\cdots$	$Y_{ir_i 1}$	$\cdots$	$Y_{tr_t 1}$
$Y_{1r_1 2}$	$Y_{2r_2 2}$	$\cdots$	$Y_{ir_i 2}$	$\cdots$	$Y_{tr_t 2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$Y_{1r_1s_{1r_1}}$	$Y_{2r_2s_{2r_2}}$	$\cdots$	$Y_{ir_is_{ir_i}}$	$\cdots$	$Y_{tr_ts_{tr_t}}$

masing-masing total dirumuskan sebagai berikut :

$$Y_{ij.} = \sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk} = s_{ij}\mu + s_{ij}\tau_i + s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{ij.} \qquad (55)$$

$$Y_{i..} = \sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.} = s_{i.}\mu + s_{i.}\tau_i + \sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{i..} \qquad (56)$$

$$Y_{...} = \sum_{i=1}^{t} Y_{i..} = \sum_{i=1}^{t} s_{i.}\mu + \sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i + \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}\varepsilon_{ij} + \delta_{...} \qquad (57)$$

dimana :

$Y_{ij.}$ = *total unit sampel pada perlakuan ke-i dalam ulangan ke-j*

$Y_{i..}$ = *total perlakuan*

$Y_{...}$ = *total keseluruhan*

Total keseluruhan, unit sampel dan perlakuan yang diperoleh digunakan untuk pendugaan dan perhitungan jumlah kuadrat. Ketiga total tersebut juga dapat digunakan untuk menghitung rata-rata, yaitu:

$$\overline{Y}_{ij.} = \frac{Y_{ij.}}{s_{ij}} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} + \overline{\delta}_{ij.} \qquad (58)$$

$$\overline{Y}_{i..} = \frac{Y_{i..}}{s_{i.}} = \mu + \tau_i + \frac{\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}\varepsilon_{ij}}{s_{i.}} + \overline{\delta}_{i..} \qquad (59)$$

$$\overline{Y}_{...} = \frac{Y_{...}}{s_{..}} = \mu + \frac{\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i}{s_{..}} + \frac{\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}\varepsilon_{ij}}{s_{..}} + \overline{\delta}_{...} \qquad (60)$$

Dimana :

$\overline{Y}_{i..}$ = rata-rata perlakuan ke-*i*

$\overline{Y}_{ij.}$ = rata-rata unit sampel ke-*ij*

$\overline{Y}_{...}$ = rataan keseluruhan

$$s_{i.} = \sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}$$

$$s_{..} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij}$$

5.3 Analisis Varian

Model Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel terbentuk dari perlakuan, unit sampel dan galat. Sebagai konsekuensinya, Analisis Varian (ANAVA) untuk Rancangan Percobaan Acak Lengkap dengan subsampel hanya mencantumkan sumber keragaman perlakuan, galat dan galat sampel.

Pada ketentuan-ketentuan perhitungan, jumlah kuadrat yang diperlukan untuk sumber keragaman antara lain adalah Jumlah Kuadrat Perlakuan (*JKP*), Jumlah Kuadrat

Galat (*JKG*), Jumlah Kuadrat Galat sampel (*JKS*), dan Jumlah Kuadrat Total (*JKT*) (Lentner & Bishop, 1986).

Menurut Lentner dan Bishop (1986), pendefinisian secara umum dan formula perhitungan untuk masing-masing jumlah kuadrat dengan ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel adalah sebagai berikut:

$$FK = \text{faktor koreksi} = \frac{Y_{...}^{2}}{s_{..}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}\right)^2}{s_{..}} \tag{61}$$

$$JKT = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}^2 - FK \tag{62}$$

$$JKP = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(\bar{Y}_{i..} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{s_{i.}} - FK \tag{63}$$

$$JKG = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}}\left(\bar{Y}_{ij.} - \bar{Y}_{...}\right)^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\frac{Y_{ij.}^2}{s_{ij}} - \sum_{i=1}^{t}\frac{Y_{i..}^2}{s_{i.}} \tag{64}$$

$$JKS = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}}(Y_{ijk} - \bar{Y}_{ij.})^2 = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=1}^{s_{ij}} Y_{ijk}^2 - \frac{1}{s_{..}}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} Y_{ij.}^2 \tag{65}$$

Derajat bebas untuk perlakuan banyaknya perlakuan dikurangi satu *(t-1)*, galat $\sum_{i=1}^{t} r_i - t$, galat sampel $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij} - \sum_{i=1}^{t} r_i$, dan total $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} s_{ij} - 1$. Pencarian kuadrat tengah dari masing-masing sumber keragaman ditentukan dengan membagi jumlah kuadrat dengan derajat bebas masing-masing.

Perhitungan-perhitungan di atas dapat diringkas dalam tabel ANAVA untuk Rancangan acak lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel adalah sebagai berikut:

Tabel 5.2 ANAVA untuk Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel pada kasus ketidaksamaan jumlah ulangan dan unit sampel

Sumber Keragaman	Derajat Bebas	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	NHKT
Perlakuan	$t-1$	JKP	$KTP = \frac{JKP}{db}$	$\kappa + \varphi\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\delta}^2$
Galat	$\sum_{i=1}^{t} r_i - t$	JKG	$KTG = \frac{JKG}{db}$	$\theta\sigma_{\varepsilon}^2 + \sigma_{\delta}^2$
Galat sampel	$s_{..} - \sum_{i=1}^{t} r_i$	JKS	$KTS = \frac{JKS}{db}$	σ_{δ}^2
Total	$s_{..} - 1$	JKT		

dengan

$$\kappa = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{t} s_{i.}\tau_i \right)^2}{s_{..}} \right)}{t-1}$$

$$\varphi = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{..}} \right)}{t-1}$$

$$\theta = \frac{\left(s_{..} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} \right)}{\sum_{i=1}^{t} r_i - t}$$

6. Kesimpulan dan Saran

6.1 Kesimpulan

- Rancangan Acak Lengkap dengan subsampel merupakan rancangan yang digunakan apabila satuan percobaan banyak. Hal ini bertujuan untuk menghemat sumber-sumber pendukung dalam penelitian.
- Prosedur tabel ANAVA untuk ketiga kasus penelitian ini mempunyai perbedaan, namun untuk koefisien nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat pada kasus ke-2 dan 3 mempunyai kesamaan bentuk notasi
- Prosedur ANAVA pada kasus 1, koefisien nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat adalah sama yaitu s
- Prosedur ANAVA pada kasus 2, koefisien nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat masing-masing adalah $\varphi = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} \frac{s_{ij}^2}{s_{..}} \right)}{t-1}$ dan $\theta = \frac{\left(s_{..} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} \right)}{tr-t}$
- Prosedur ANAVA pada kasus 3, koefisien nilai harapan kuadrat tengah perlakuan dan galat masing-masing adalah $\varphi = \frac{\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{..}} \right)}{t-1}$ dan $\theta = \frac{\left(s_{..} - \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{r_i} \frac{s_{ij}^2}{s_{i.}} \right)}{\sum_{i=1}^{t} r_i - t}$
- Nilai Kuadrat Tengah Maya dalam Prosedur Satterthwaites pada kasus 2 dan 3, memiliki nilai yang sama kuadrat tengah galat dan galat sampel di setiap kasus.
- Dari teladan penerapan ketiga kasus, untuk taraf uji < 5% dapat disimpulkan ada pengaruh perlakuan terhadap pengamatan.

6.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya membahas rancangan dengan subsampel pada Rancangan Acak Lengkap. Untuk penelitian lebih lanjut, sebaiknya dibahas pula rancangan dengan subsampel pada rancangan-rancangan lainnya. Misalnya Rancangan Acak Kelompok Lengkap dengan subsampel.

Daftar Pustaka

Anonim.2000.*The Completely Randomized Design (CRD) with subsampling.* http://webservant@tfrec.wsu.edu/The%Completely%Randomize%Design%(CRD) %with%subsampling

Anonim.2000. *The Completely Randomized Design (CRD) with* http://webservant@tfrec.wsu.edu/The%Completely%Randomize%Design%(CRD) %with%subsampling

Hinkelmann, K. and Kempthorne, O.2007.*Design and Analysis of Experiments.* A John Wiley & Sons, Inc. Blacksburg

Lentner, M. and T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valey Book Company. Blacksburg

Montgomery, D. C. 1976. *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons. Canada

Nugroho, S. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan.*UNIB Press. Bengkulu

Sriliana, I. 2007. *Data Hilang dalam Rancangan Acak Kelompok Lengkap Dasar dan Rancangan Bujur Sangkar Latin Dasar*.Skripsi. Bengkulu

Walpole, RE. 1995. *Pengantar Statistika Edisi ke-3*. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta

Walpole, R.E dan Myers, R.H. 1986. *Ilmu Peluang Statistika Untuk Insinyur dan Ilmuan, Terbitan ke-2.* ITB. Bandung