ANALISIS REGRESI LINIER BERGANDA DENGAN PROSEDUR AKAR

Nur Nelawati S.[1] Ir. Sigit Nugroho, M.Sc.,Ph.D.[2] Fachri Faisal, S.Si., M.Si.[2]

1. **Alumni Jurusan Matematika FMIPA**
2. **Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA**

ABSTRAK

Regresi Linier Berganda dapat diselesaikan dengan menggunakan prosedur akar. Di dalam Prosedur akar ini selain dapat mencari nilai penduga titik dan/atau penduga interval parameter $\underset{\sim}{\beta}$, juga dapat mencari nilai penduga titik dan/atau penduga interval kombinasi linier parameter $\underset{\sim}{\beta}$, menguji pengaruh peubah bebas terhadap peubah tak bebas dengan menggunakan analisis keragaman parsial dan sekuensial, serta dapat menguji pengaruh kombinasi linier parameter $\underset{\sim}{\beta}$. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji prosedur akar dalam menyelesaikan persoalan regresi linier berganda. Langkah penelitian skripsi ini adalah mempelajari teori tentang prosedur akar dalam regresi linier berganda dengan menggunakan bantuan paket program Microsoft Excel. Dari analisis yang didapat, diperoleh kesimpulan bahwa, dilihat dari uji sekuensial, model yang didapat setiap kombinasi berbeda. Dilihat dari uji parsial, nilai t_{hitung} yang didapat jika dikuadratkan akan sama nilainya dengan nilai F_{hitung} pada uji sekuensial untuk parameter terakhir yang dimasukkan dalam model.

Kata Kunci : *Analisis Regresi Linier Berganda, Prosedur Akar.*

PENDAHULUAN

Regresi merupakan suatu teknik statistika yang dapat digunakan untuk menggambarkan hubungan fungsional antara satu peubah bebas atau lebih terhadap satu peubah tak bebas. Istilah regresi pertama kali dikemukakan oleh seorang antropolog dan ahli meteorologi terkenal dari Inggris yang bernama Sir Francis Galton pada tahun 1855, Istilah regresi ini muncul karena pengamatannya terhadap tinggi beberapa orang anak dan orang tuanya (Draper dan Smith, 1992).

Regresi sebagai suatu teknik analisis telah banyak digunakan, tidak hanya di bidang statistika tapi juga dibidang lain seperti bisnis, perkebunan, perikanan, sosial, kesehatan, dan bidang-bidang lainnya. Dalam bidang bisnis, regresi dapat digunakan untuk melihat hubungan antara beberapa aktifitas promosi dengan penjualan produk. Sedangkan dalam bidang kesehatan, regresi dapat digunakan untuk melihat hubungan antara kepuasan pasien terhadap pelayanan rawat inap yang ada di puskesmas.

Salah satu prosedur yang dapat digunakan dalam analisis regresi linier berganda adalah prosedur akar. Prosedur ini berguna untuk memudahkan pencarian nilai penduga yang dilakukan secara manual akibat dari semakin besarnya nilai k, yaitu dengan semakin banyaknya peubah bebas yang digunakan didalam model, sehingga semakin canggung dan memakan waktu yang cukup lama untuk mendapatkan nilai $\hat{\beta}$ secara manual karena ordo matriks $X'X$ juga semakin besar.

Berdasarkan latar belakang diatas, maka permasalahan yang dapat diambil adalah:

a. Bagaimana cara mencari nilai penduga titik dan/atau penduga interval parameter regresi linier berganda dengan menggunakan prosedur akar?
b. Bagaimana cara menguji pengaruh peubah bebas terhadap peubah tak bebas dengan menggunakan analisis keragaman parsial dan sekuensial pada prosedur akar?
c. Bagaimana cara mencari nilai penduga titik dan/atau penduga interval kombinasi linier parameter regresi linier berganda dengan menggunakan prosedur akar?
d. Bagaimana cara menguji pengaruh gugus kombinasi linier parameter regresi linier berganda dengan menggunakan prosedur akar?

Dalam penelitian ini dibatasi hanya membahas mengenai penggunaan prosedur akar dalam regresi linier berganda, yaitu deskripsi prosedur akar, perhitungan penduga, cara mendapatkan model regresi linier berganda dengan prosedur akar dan menguji pengaruh masing-masing peubah bebas terhadap peubah tak bebas.

Tujuan dari penelitian ini adalah

a. Untuk mendapatkan nilai titik dan/atau penduga interval parameter regresi linier berganda dengan menggunakan prosedur akar.
b. Untuk mengetahui seberapa besar pengaruh peubah bebas terhadap peubah tak bebas dengan menggunakan analisis keragaman parsial dan sekuensial pada prosedur akar.
c. Untuk mendapatkan nilai penduga titik dan/atau penduga interval kombinasi linier parameter regresi linier berganda dengan menggunakan prosedur akar.
d. Untuk mengetahui pengaruh gugus kombinasi linier parameter regresi linier berganda dengan menggunakan prosedur akar

Manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah dapat menambah pengetahuan tentang regresi linier berganda dan dapat memberikan informasi mengenai prosedur akar.

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur. Literatur-literatur yang digunakan berupa buku-buku teks dan buku-buku referensi penunjang lainnya yang diperoleh dari perpustakaan, serta sumber referensi lainnya

REGRESI LINIER BERGANDA

Analisis regresi memiliki dua jenis pilihan model jika dilihat dari derajat parameternya yaitu linier dan non-linier, sedangkan jika dilihat dari jumlah peubah bebasnya, analisis regresi terbagi menjadi dua yaitu analisis regresi linier sederhana dan analisis regresi linier berganda.

Analisis regresi linier berganda merupakan pengembangan dari regresi linier sederhana yang hanya menggunakan satu peubah bebas, maka pada regresi linier barganda ini menggunakan lebih dari satu peubah bebas (Nugroho, 2008).

Model regresi linier berganda dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \ldots + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, n$$

dimana:

$Y_i =$ nilai peubah tak bebas ke-i (*dependent*).

$X_{1i}, X_{2i}, \ldots, X_{ki} =$ peubah bebas (*independent*).

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k =$ koefisien regresi/parameter.

$\varepsilon_i =$ error/galat.

Parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ pada persamaan regresi linier di atas diduga dengan $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_k$, dengan menggunakan metode kuadrat terkecil.

Model regresi linier berganda pada persamaan (1) dapat juga ditulis dalam bentuk matriks. Dengan menggunakan lambang matriks model regresi linier berganda dapat ditulis sebagai model regresi linier umum, yaitu

$$\underset{n\times 1}{\underline{Y}} = \underset{n\times(k+1)}{\underline{X}} \; \underset{(k+1)\times 1}{\underline{\beta}} + \underset{n\times 1}{\underline{\varepsilon}}$$

dimana

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \qquad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \qquad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Metode kuadrat terkecil merupakan salah satu metode yang paling banyak digunakan untuk menduga parameter-parameter regresi. Metode kuadrat terkecil dipilih karena metode ini memiliki sifat-sifat yang dapat menghasilkan penduga yang baik berdasarkan beberapa asumsi. Asumsi-asumsi yang diperlukan dalam model regresi linier berganda adalah eror (kesalahan) menyebar menurut sebaran normal ganda-k (*Multivariate normal*$_k$), eror-eror tidak saling berkorelasi, ini berarti nilai eror untuk satu kasus tidak tergantung kasus lainnya (Nugroho, 2008).

Pada regresi linier berganda juga digunakan metode kuadrat terkecil untuk mencari penduga $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, ..., \hat{\beta}_k$ dari parameter $\beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$. Biasanya penduga kuadrat terkecil ini diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat galat.

$$JKG = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Untuk melakukan prediksi terhadap nilai-nilai pengamatan, terlebih dahulu harus diduga setiap nilai $\hat{\underline{\beta}}_i$, dan langkah-langkah yang diperlukan adalah:

1. Menuliskan hubungan linier tersebut dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & ... & X_{k1} \\ 1 & X_{12} & ... & X_{k2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{1n} & ... & X_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

   dimana nilai-nilai dalam vektor $\underline{Y}$ dan matriks $\underline{X}$ sudah diketahui.

2. Menuliskan persamaan normal tersebut dalam bentuk matriks $\underline{X}'\underline{Y} = \underline{X}'\underline{X}\hat{\underline{\beta}}$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki} Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & ... & \sum_{i=1}^{n} X_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i} & \sum_{i=1}^{n} X_i^2 & ... & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{ki} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki} & \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{ki} & ... & \sum_{i=1}^{n} X_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

3. Mengalikan kedua ruas dengan matriks $(\underline{X}'\underline{X})^{-1}$ akan diperoleh $\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}(\underline{X}'\underline{Y})$

Sehingga dapat dilihat bahwa semakin banyak peubah bebas yang digunakan maka, semakin sulit untuk mendapatkan nilai $\hat{\underline{\beta}}$ secara manual karena ordo matriks $(\underline{X}'\underline{X})$ semakin besar.

PROSEDUR AKAR

Prosedur akar merupakan salah satu prosedur yang dapat digunakan dalam analisis regresi linier berganda. Di dalam prosedur akar hal-hal yang dapat dicari adalah nilai penduga titik dan/atau penduga interval parameter $\underline{\beta}$, nilai penduga titik dan/atau penduga interval kombinasi linier parameter $\underline{\beta}$, menguji pengaruh peubah bebas terhadap peubah tak bebas dengan menggunakan analisis keragaman parsial dan sekuensial, dan menguji pengaruh kombinasi linier parameter $\underline{\beta}$.

Algoritma:

Misalkan $S = X'X$ sebuah matriks positif definit berukuran $p \times p$. Terdapat sebuah matriks T segitiga atas pada batasan p sehingga

Tabel 2. Prosedur Pengolahan

Baris	$X'X$					$X'y$	I				
	β_0	β_1	β_2	$\cdots$	β_k		$s^2_{\beta_0}$	$s^2_{\beta_1}$	$s^2_{\beta_2}$	$\cdots$	$s^2_{\beta_k}$
1	s_{11}	s_{12}	s_{13}	$\cdots$	s_{1p}	$s_{1,p+1}$	$s_{1,p+2}$	$s_{1,p+3}$	$s_{1,p+4}$	$\cdots$	$s_{1,2p+1}$
2		s_{22}	s_{23}	$\cdots$	s_{2p}	$s_{2,p+1}$	$s_{2,p+2}$	$s_{2,p+3}$	$s_{2,p+4}$	$\cdots$	$s_{2,2p+1}$
3			s_{33}	$\cdots$	s_{3p}	$s_{3,p+1}$	$s_{3,p+2}$	$s_{3,p+3}$	$s_{3,p+4}$	$\cdots$	$s_{3,2p+1}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
P				$\cdots$	s_{pp}	$s_{p,p+1}$	$s_{p,p+2}$	$s_{p,p+3}$	$s_{p,p+4}$	$\cdots$	$s_{p,2p+1}$
p+1	t_{11}	t_{12}	t_{13}	$\cdots$	t_{1p}	$t_{1,p+1}$	$t_{1,p+2}$	$t_{1,p+3}$	$t_{1,p+4}$	$\cdots$	$t_{1,2p+1}$
p+2		t_{22}	t_{23}	$\cdots$	t_{2p}	$t_{2,p+1}$	$t_{2,p+2}$	$t_{2,p+3}$	$t_{2,p+4}$	$\cdots$	$t_{2,2p+1}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
2p					t_{pp}	$t_{p,p+1}$	$t_{p,p+2}$	$t_{p,p+3}$	$t_{p,p+4}$	$\cdots$	$t_{p,2p+1}$

Dari persamaan (9), karena $S = X'X = T'T$, maka untuk $i = 1$, $j = 2,3,\ldots,p$

$$s_{11} = t_{11}^2$$

$$s_{1j} = t_{11}.t_{ij}$$

Selanjutnya untuk $i = 2,3,\ldots,p$, $j = i+1, i+2,\ldots,p$

$$s_{ii} = t_{ii}^2 + \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2$$

$$s_{ij} = t_{ii}.t_{ij} + \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}.t_{kj}$$

Dengan Demikian

$$t_{11} = \sqrt{s_{11}}$$

$$t_{1j} = \frac{s_{1j}}{t_{11}} \qquad ; \quad j = 2,3,4,\ldots,p$$

$$t_{ii} = \sqrt{s_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2} \qquad ; \quad i = 2,3,\ldots,p$$

$$t_{ij} = \frac{1}{t_{ii}}\left[s_{ij} - \sum_{k=1}^{i=1} t_{ki} t_{kj} \right] \quad ; \quad \begin{cases} i = 2,3,\ldots,p \\ j = i+1, i+2,\ldots,p \end{cases}$$

Apabila $S = X'X$ digabung dengan $X'y$ dan I , $\left[S \mid X'y \mid I \right]$ dengan cara yang sama yaitu prosedur akar akan diperoleh

$$\left[T \mid t \mid (T')^{-1} \right]$$

Sehingga invers dari $X'X$ dapat diperoleh dari

$$T^{-1}(T')^{-1}$$

Untuk mendapatkan nilai dugaan parameter regresi linier berganda dengan menggunakan p persamaan, dapat dilihat dari tabel di atas sehingga diperoleh

$$t_{11}\hat{\beta}_0 + t_{12}\hat{\beta}_1 + t_{13}\hat{\beta}_2 + ... + t_{1p}\hat{\beta}_k = t_{1,p+1}$$

$$t_{22}\hat{\beta}_1 + t_{23}\hat{\beta}_2 + ... + t_{2p}\hat{\beta}_k = t_{2,p+1}$$

$$t_{33}\hat{\beta}_2 + ... + t_{3p}\hat{\beta}_k = t_{3,p+1}$$

$$... \quad ... \quad = \quad ...$$

$$t_{pp}\hat{\beta}_k = t_{p,p+1}$$

Atau dengan menggunakan persamaan matriks diperoleh

$$S = X'X = T'T$$

$$X'X\hat{\beta} = X'y \qquad \text{atau} \qquad T'T\hat{\beta} = X'y$$

$$(T')^{-1}T'T\hat{\beta} = (T')^{-1}X'y$$

$$T\hat{\beta} = (T')^{-1}X'y$$

$$T\hat{\beta} = t$$

Dengan menggunakan subtitusi balik, akan diperoleh nilai-nilai dugaan parameter regresi. Secara umum rumus di atas dapat dituliskan menjadi:

$$\hat{\beta}_k = \frac{t_{p,p+1}}{t_{p,p}}$$

$$\hat{\beta}_i = \frac{1}{t_{i+1,i+1}}\left[t_{i+1,p+1} - \sum_{j=i+2}^{p} t_{i+1,j}\hat{\beta}_{j-1}\right]$$

Untuk mendapatkan nilai dugaan kombinasi linier parameter regresi linier berganda dengan menggunakan prosedur akar adalah

$$\left[X'X \mid X'y \mid l_1, l_2\right] = \left[T'T \mid X'y \mid l_1, l_2\right]$$

$$(T')^{-1}\left[X'X \mid X'y \mid l_1, l_2\right] = (T')^{-1}\left[T'T \mid X'y \mid l_1, l_2\right]$$

$$= \left[(T')^{-1}T'T \mid (T')^{-1}X'y \mid (T')^{-1}l_1, l_2\right]$$

$$= \left[T \mid (T')^{-1}X'y \mid (T')^{-1}l_1, l_2\right]$$

$$= \left[T \mid t \mid a_1, a_2\right]$$

Selanjutnya dengan menggunakan prosedur akar dapat diperoleh nilai $t't$

$$\left[T \mid t\right] = (T')^{-1}\left[S \mid s\right] = (T')^{-1}\left[X'X \mid X'y\right]$$

$$\begin{aligned} t't &= \left[(T')^{-1}s\right]'\left[(T')^{-1}s\right] \\ &= s'T^{-1}(T')^{-1}s \\ &= s'(T'T)^{-1}s \\ &= y'X(X'X)^{-1}X'y \\ &= y'(XX^{-1})(X'^{-1}X')y \\ &= y'(XX^{-1})y \\ &= \hat{\beta}'X'y \end{aligned}$$

Sehingga dari persamaan (24) dan (25) didapat

$$l_i'(X'X)^{-1}l_i = a_i'a_i$$

$$\hat{\beta}'X'y = t't$$

Pengujian penduga parameter memiliki tujuan untuk memeriksa pengaruh antara peubah bebas terhadap peubah tak bebasnya di dalam model. Uji yang digunakan adalah Uji Parameter secara parsial dan sekuensial.

Uji Parsial

Uji parsial digunakan untuk menguji apakah sebuah peubah bebas (X) benar-benar memberikan pengaruh terhadap peubah tak bebas (Y). Dalam pengujian ini ingin diketahui apakah jika secara terpisah, suatu peubah bebas (X) masih memberikan pengaruh secara signifikan terhadap peubah tak bebas (Y).

1. Hipotesis yang akan diuji adalah:

   $H_0 : \beta_i = 0$ (tidak ada pengaruh peubah bebas $ke-i$ dengan peubah tak bebas)

   $H_1 : \beta_i \neq 0$ (ada pengaruh peubah bebas $ke-i$ dengan peubah tak bebas),

   untuk $i = 1, 2, 3, ..., k$

2. Statistik uji

   Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji-t

   $$\left|t_{hit}\right| = \frac{\hat{\beta}_i}{s_{\hat{\beta}_i}}$$

   dimana

   $\hat{\beta}_i$ = penduga parameter $ke-i$

   $s_{\hat{\beta}_i}$ = galat baku (*standar error*) penduga parameter $ke-i$

   dimana

   $$s^2_{\hat{\beta}_i} = s^2 \sum_{j=1}^{p} (t_{j,p+i+2})^2$$

   dimana

   $$s^2 = KT(galat) = \hat{\sigma}^2$$

   $$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-p}(y'y - y'X(X'X)^{-1}X'y)$$

$$= \frac{1}{n-p}(y'y - y'X\hat{\beta})$$

$$= \frac{1}{n-p}(y'y - \hat{\beta}'X'y)$$

$$= \frac{1}{n-p}\left(y'y - t't\right)$$

Statistik uji di atas menyebar menurut sebaran t dengan derajat bebas $(n-k-1)$

3. Kriteria pengujian

   Kriteria pengujiannya adalah membandingkan antara nilai t_{hit} dengan nilai t_{tabel}

   Jika $t_{hit} \geq t_{tabel}$ maka H_0 ditolak

   Jika $t_{hit} < t_{tabel}$ maka H_0 diterima

4. Menarik Kesimpulan

Uji Sekuensial

Uji sekuensial ini bertujuan untuk menguji peranan peubah bebas secara berurutan terhadap peubah tak bebasnya.

Setiap peubah bebas dalam uji sekuensial memiliki db 1

1. Hipotesis yang akan diuji adalah:

   $$H_0 : Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j X_{ji} + \varepsilon_i$$

   (peubah bebas $ke-k$ tak berpengaruh terhadap peubah tak bebas bila di dalam model sudah ada $k-1$ peubah bebas sebelumnya)

   $$H_1 : Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j X_{ji} + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \qquad k = 2, 3, ...$$

   (peubah bebas $ke-k$ berpengaruh terhadap peubah tak bebas bila di dalam model sudah ada $k-1$ peubah bebas sebelumnya)

2. Statistik uji

   Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji-F

   $$F = \frac{JK(\beta_i \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{i-1})}{\frac{JKG}{(n-k-1)}} = \frac{JK(\beta_i \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{i-1})}{s^2}$$

   dimana

   k = banyaknya parameter yang diduga

   n = banyaknya observasi

   Dengan menggunakan prosedur akar maka uji sekuensialnya dapat digunakan dengan mencari Jumlah Kuadrat Sekuensial

   $$JK(\beta_i \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{i-1}) = (t_{i+1,p+1})^2 \quad ; \quad i = 1, 2, ..., k$$

   Jumlah Kuadrat Total

$$JKT = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2}{n}$$

Jumlah Kuadrat Galat

$$JKG = JKT - \sum_{i=1}^{k} JK(\beta_i \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{i-1})$$

Tabel 3. Analisis Keragaman Sekuensial

Sumber Keragaman	Db	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F_{hitung}	p-hitung
$(\beta_1 \mid \beta_0)$	1	$JK(\beta_1 \mid \beta_0)$	$\frac{JK}{db}$	$\frac{KTP}{KTG}$	
$(\beta_2 \mid \beta_0, \beta_1)$	1	$JK(\beta_2 \mid \beta_0, \beta_1)$			
…	…				
$(\beta_k \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1})$	1	$JK(\beta_k \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2, ..., \beta_{k-1})$			
Galat	$n-k$	JKG			

3. Kriteria pengujian

   Kriteria pengujiannya adalah membandingkan antara nilai F_{hit} dengan nilai F_{tabel}

   Jika $F_{hit} > F_{tabel}$ maka H_0 ditolak

   Jika $F_{hit} \le F_{tabel}$ maka H_0 diterima

   Atau H_0 ditolak jika $nilai - p < \alpha$
4. Menarik Kesimpulan

Pengujian Gugus Kombinasi Linier

1. Hipotesis yang akan diuji adalah:

   $H_0 : H\underline{\beta} = 0 \quad vs \quad H_1 : H\underline{\beta} \neq 0$
2. Statistik uji

   Statistik uji yang digunakan adalah statistik uji

$$W = \frac{\frac{1}{q}(H\hat{\beta}-h)'\left[\operatorname{cov}\left(H\hat{\beta}-h\right)\right]^{-1}\left(H\hat{\beta}-h\right)}{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}$$

$$= \left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{(H\hat{\beta}-h)'\left[\operatorname{cov}\left(H\hat{\beta}-h\right)\right]^{-1}\left(H\hat{\beta}-h\right)}{y'(I-XX^{-1})y}\right)$$

$$= \frac{1}{q}(H\hat{\beta}-h)'\left[\operatorname{cov}\left(H\hat{\beta}-h\right)\right]^{-1}\left(H\hat{\beta}-h\right)$$

dimana

H = Matriks berukuran $q \times p$

q = Banyaknya kombinasi linier
p = Banyaknya parameter regresi di dalam model
n = Banyaknya sampel yang digunakan

$$\left[\operatorname{cov}\left(H\hat{\beta}-h\right)\right]=\left[H(X'X)^{-1}H'\right]$$

$\left[X'X \mid X'y \mid I \mid H'\right]=\left[T'T \mid X'y \mid I \mid H'\right]$ dengan cara yang sama yaitu prosedur akar sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}(T')^{-1}\left[X'X \mid X'y \mid I \mid H'\right] &= (T')^{-1}\left[T'T \mid X'y \mid I \mid H'\right]\\ &= \left[(T')^{-1}T'T \mid (T')^{-1}X'y \mid (T')^{-1}I \mid (T')^{-1}H'\right]\\ &= \left[T \mid (T')^{-1}X'y \mid (T')^{-1}I \mid (T')^{-1}H'\right]\\ &= \left[T \mid t \mid (T')^{-1} \mid G'\right]\end{aligned}$$

Selanjutnya akan dihitung GG' *dan* $Gt-h=g$ dan di dalam format $\left[GG' \mid g\right]$. Karena $G'=T'^{-1}H'$ *dan* $t=T'^{-1}X'y$ dengan demikian $GG'=HT^{-1}T'^{-1}H'=H(X'X)^{-1}H$ yang merupakan matriks positif definit berukuran $q \times q$ dan dapat dituliskan sebagai $T_0'T_0$ dimana T_0 merupakan matriks segitiga atas. Dengan demikian

$$\begin{aligned}g+h=Gt &= HT^{-1}T'^{-1}X'y\\ &= H(T'T)^{-1}X'y\\ &= H(X'X)^{-1}X'y\\ &= H\hat{\beta}\end{aligned}$$

$$\left[GG' \mid g\right]=\left[T_0'T_0 \mid g\right]$$

$$\begin{aligned}T_0'^{-1}\left[GG' \mid g\right] &= T_0'^{-1}\left[T_0'T_0 \mid g\right]\\ &= \left[T_0'^{-1}T_0'T \mid T_0'^{-1}g\right]\\ &= \left[T_0 \mid T_0'^{-1}g\right]\\ &= \left[T_0 \mid t_0\right]\end{aligned}$$

Sehingga didapat bahwa

$$w=\left(\frac{t_0't_0}{y'y-t't}\right)\left(\frac{n-p}{q}\right)$$

3. Kriteria pengujian
   Kriteria pengujiannya adalah membandingkan antara nilai w dengan nilai $F_{\alpha,q,n-p}$

   Jika $w \geq F_{\alpha,q,n-p}$ maka H_0 ditolak

   Jika $w < F_{\alpha,q,n-p}$ maka H_0 diterima
4. Menarik Kesimpulan

TELADAN PENERAPAN

Pada bab ini akan dibahas mengenai pengaplikasian Prosedur Akar dengan data yang diambil dari buku "*Analisis Regresi Terapan*" oleh Draper & Smith, 1992. Data tersebut disajikan pada tabel 4 berikut.

Tabel 4. Data hubungan antara kandungan vitamin B_2 dalam *turnip green*

NO	X_0	X_1	X_2	X_3	Y
1	1	1.76	0.070	7.8	110.4
2	1	1.55	0.070	8.9	102.8
3	1	2.73	0.070	8.9	101.0
4	1	2.73	0.070	7.2	108.4
5	1	2.56	0.070	8.4	100.7
6	1	2.80	0.070	8.7	100.3
7	1	2.80	0.070	7.4	102.0
8	1	1.84	0.070	8.7	93.7
9	1	2.16	0.070	8.8	98.9
10	1	1.98	0.020	7.6	96.6
11	1	0.59	0.020	6.5	99.4
12	1	0.80	0.020	6.7	96.2
13	1	0.80	0.020	6.2	99.0
14	1	1.05	0.020	7.0	88.4
15	1	1.80	0.020	7.3	75.3
16	1	1.80	0.020	6.5	92.0
17	1	1.77	0.020	7.6	82.4
18	1	2.30	0.020	8.2	77.1
19	1	2.03	0.474	7.6	74.0
20	1	1.91	0.474	8.3	65.7
21	1	1.91	0.474	8.2	56.8
22	1	1.91	0.474	6.9	62.1
23	1	0.76	0.474	7.4	61.0
24	1	2.13	0.474	7.6	53.2
25	1	2.13	0.474	6.9	59.4
26	1	1.51	0.474	7.5	58.7
27	1	2.05	0.474	7.6	58.0

dimana

X_1 : radiasi dalam gram kalori relatif per menit akibat terjemur matahari selama setengah hari sebelumnya (dikodekan dengan dibagi dengan 100).

X_2 : kelembapan tanah rata-rata (dikodekan dengan dibagi 100).

X_3 : suhu udara dalam derajat Fahrenheit (dikodekan dengan dibagi dengan 10).

Y : kandungan vitamin B_2 dalam miligram per gram *turnip green*.

Analisis data ini dilakukan dengan bantuan Microsoft Excel. Data ini akan dianalisis menjadi enam kombinasi secara sekuensial yaitu:

1. X_1, X_2, X_3
2. X_1, X_3, X_2
3. X_2, X_1, X_3
4. X_2, X_3, X_1
5. X_3, X_1, X_2
6. X_3, X_2, X_1

Sedangkan untuk menguji pengaruh masing-masing peubah bebas terhadap peubah tak bebas, digunakan uji parsial. Secara parsial, ada tiga peubah bebas yang akan diuji yaitu:

1. X_1
2. X_2
3. X_3

Pengujian Secara Sekuensial

Untuk pengujian secara sekuensial, hipotesis yang akan diuji adalah

$$H_0 : Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j X_{ji} + \varepsilon_i \quad vs \quad H_1 : Y_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^{k-1} \beta_j X_{ji} + \beta_k X_{ki} + \varepsilon_i \quad k = 2, 3, ...$$

Kombinasi X_1, X_2, X_3

Berdasarkan data di atas maka, pengujian secara sekuensial untuk kombinasi X_1, X_2, X_3 adalah sebagai berikut:

Tabel 5. Prosedur Pengolahan Kombinasi X_1, X_2, X_3

(X'X)				(X'y)	I				L_1	l_2	h_1	h_2
27	50,16	5,076	206,4	2273,5	1	0	0	0	0	2	2	-2
50,16	103,4438	9,46806	390,317	4255,323	0	1	0	0	1	2	1	-1
5,076	9,46806	2,069784	38,74	340,5806	0	0	1	0	-3	1	3	1
206,4	390,317	38,74	1593,76	17426,36	0	0	0	1	2	0	-1	1

T				t	T'^{-1}				A_1	a_2	g_1	g_2
5,20	9,65	0,98	39,72	437,54	0,19	0	0	0	0	0,38	0,38	-0,38
	3,20	0,01	2,15	9,89	-0,58	0,31	0	0	0,31	-0,54	-0,85	0,85
		1,06	-0,08	-82,34	-0,17	0,00	0,95	0	-2,84	0,60	2,49	1,29
			3,37	5,52	-1,91	-0,20	0,02	0,30	0,32	-4,18	-4,24	4,33

Dengan menggunakan persamaan (20) maka, diperoleh nilai penduga parameter regresinya $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3)$ adalah

$$\hat{\beta}_0 = 82,06942$$
$$\hat{\beta}_1 = 2,276474$$
$$\hat{\beta}_2 = -77,83103551$$
$$\hat{\beta}_3 = 1,640058$$

Sehingga diperoleh persamaan regresinya

$$\hat{Y} = 82,06942 + 2,276474X_{1i} - 77,83103551X_{2i} + 1,640058X_{3i}$$

Nilai penduga titik kombinasi linier dari $\beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_3$ adalah

$$I'\beta = 239,0497 = a't$$

Selang Kepercayaan 99% bagi $\beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_3$ adalah

$$159,2165 < \beta_1 - 3\beta_2 + 2\beta_3 < 318,8829$$

Berdasarkan Tabel 5, maka dapat diperoleh tabel analisis keragaman sekuensialnya yaitu:

Table 6. Analisis Keragaman Sekuensial

Sumber Keragaman	db	Jumlah Kuadrat	Kuadrat Tengah	F_{hitung}	p-hitung
β_0	1	191437,120	191437,120	1962,859	0,000509
$(\beta_1 \mid \beta_0)$	1	97,750	97,750	1,002258	0,625886
$(\beta_2 \mid \beta_0, \beta_1)$	1	6779,104	6779,104	69,50808	0,014275
$(\beta_3 \mid \beta_0, \beta_1, \beta_2)$	1	30,492	30,492	0,312645	0,940519
Galat	23	2243,184			
Total	27	200587,7			

Dari Tabel 6 dapat diketahui bahwa parameter yang berpengaruh dalam model adalah β_0 dan β_2 , karena nilai p-hitungnya lebih kecil dari $\alpha = 0,05$.

Pengujian Secara Parsial

Untuk pengujian secara parsial, hipotesis yang akan diuji adalah

$$H_0 : \beta_i = 0 \quad vs \quad H_1 : \beta_i \neq 0$$

Pengujian Parsial untuk X_1

Berdasarkan data di atas maka, pengujian secara parsial untuk X_1 adalah sebagai berikut:

Dengan menggunakan persamaan (30) maka, diperoleh nilai dugaan bagi σ^2 adalah

$$\hat{\sigma}^2 = 97,5297$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (28) maka diperoleh nilai t_{hitung} adalah

$$|t_{hit}| = \frac{\hat{\beta}_1}{s_{\hat{\beta}_1}} = 0,622501 \quad , \quad t_{tabel} = 2,069$$

Karena $\left|t_{hit}\right| < t_{tabel}$ untuk taraf uji $\alpha = 5\%$, Sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 diterima, ini berarti bahwa $\beta_1 = 0$ atau peubah bebas X_1 tidak memberikan pengaruh yang nyata terhadap peubah tak bebas (Y).

Pengujian Parsial untuk X_2

Berdasarkan data di atas maka, pengujian secara parsial untuk X_3 adalah sebagai berikut:

Dengan menggunakan persamaan (30) maka, diperoleh nilai dugaan bagi σ^2 adalah

$$\hat{\sigma}^2 = 97{,}52972$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (28) maka diperoleh nilai t_{hitung} adalah

$$|t_{hit}| = \frac{\hat{\beta}_2}{s_{\hat{\beta}_2}} = 8,32063 \quad , \quad t_{tabel} = 2,069$$

Karena $\left|t_{hit}\right| \geq t_{tabel}$ untuk taraf uji $\alpha = 5\%$, Sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 ditolak, ini berarti bahwa $\beta_2 \neq 0$ atau peubah bebas X_2 memberikan pengaruh yang nyata terhadap peubah tak bebas (Y).

Pengujian Parsial untuk X_3

Berdasarkan data di atas maka, pengujian secara parsial untuk X_3 adalah sebagai berikut:

Dengan menggunakan persamaan (30) maka, diperoleh nilai dugaan bagi σ^2 adalah

$$\hat{\sigma}^2 = 97{,}5297$$

Sehingga dengan menggunakan persamaan (28) maka diperoleh nilai t_{hitung} adalah

$$|t_{hit}| = \frac{\hat{\beta}_3}{s_{\hat{\beta}_3}} = 0,559147 \quad , \quad t_{tabel} = 2,069$$

Karena $\left|t_{hit}\right| < t_{tabel}$ untuk taraf uji $\alpha = 5\%$, Sehingga dapat disimpulkan bahwa H_0 diterima, ini berarti bahwa $\beta_3 = 0$ atau peubah bebas X_3 tidak memberikan pengaruh yang nyata terhadap peubah tak bebas (Y).

Pengujian Gugus Kombinasi Linier

Untuk pengujian gugus kombinasi linier, hipotesis yang akan diuji adalah

$$H_0 : \begin{cases} 2\beta_0 + \beta_1 + 3\beta_2 - \beta_3 = 22 \\ -2\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 27 \end{cases} \quad vs \quad H_1 : \begin{cases} 2\beta_0 + \beta_1 + 3\beta_2 - \beta_3 \neq 22 \\ -2\beta_0 - \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \neq 27 \end{cases}$$

Kombinasi X_1, X_2, X_3

Dari hipotesis di atas diperoleh

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad dan \quad \hat{\beta} = \begin{bmatrix} 82,06942 \\ 2,276474 \\ -77,83103551 \\ 1,640058 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan persamaan (37) maka, diperoleh nilai G'

Selanjutnya akan dihitung $GG'\ dan\ Gt - h = g$ dan di dalam format $[GG' \mid g]$. Karena $G' = T'^{-1}H'\ dan\ t = T'^{-1}X'y$ dengan demikian $GG' = HT^{-1}T'^{-1}H' = H(X'X)^{-1}H$ yang merupakan matriks positif definit berukuran $q \times q$ dan dapat dituliskan sebagai $T_0'T_0$ dimana T_0 merupakan matriks segitiga atas. Dengan demikian

G' =	0,38	-0,38		
	-0,85	0,85		
	2,49	1,29		
	-4,24	4,33		

G =	0,38	-0,85	2,49	-4,24
	-0,38	0,85	1,29	4,33

Gt	h	$Gt-h$
-68,7178	22	-90,7178
-242,606	27	-269,606

Dengan menggunakan persamaan (39) sehingga didapat

GG'		$Gt-h$
25,02648	-15,9799	-90,7178
-15,9799	21,28737	-269,606
T_0		t_0
5,002647	-3,19428	-18,134
	3,329254	-98,3798

$y'y = 200587,7$

$t't = 198344,5$

$t_0't_0 = 10007,42$

dimana:

$y'y$ = jumlah kuadrat data Y

$t't$ = nilai dugaan kombinasi linier β

$t_0't_0$ = jumlah kuadrat t_0

Dengan menggunakan persamaan (40) sehingga diperoleh nilai w.

Karena nilai $w = \left(\frac{10007,42}{200587,7 - 198344,5}\right)\left(\frac{27-4}{2}\right) = 51,30447 > F_{0,05;2,23} = 3,4221$ maka hipotesis H_0 ditolak.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

1. Prosedur Akar dapat digunakan untuk penyelesaian masalah Model Regresi Linier Berganda.
2. Prosedur Akar selain dapat mencari nilai penduga titik dan/atau penduga interval parameter $\underset{\sim}{\beta}$, dapat juga mencari nilai penduga titik dan/atau penduga interval kombinasi linier parameter $\underset{\sim}{\beta}$, menguji pengaruh peubah bebas terhadap peubah tak bebas dengan menggunakan analisis keragaman parsial dan sekuensial, serta dapat menguji gugus kombinasi linier parameter $\underset{\sim}{\beta}$.
3. Pengujian parameter pada uji sekuensial akan mendapatkan model yang berbeda-beda untuk setiap kombinasi yang digunakan.
4. Pengujian parameter pada uji parsial, nilai t_{hitung} yang didapat jika dikuadratkan akan sama dengan nilai F_{hitung} pada uji sekuensial kombinasi terakhir dengan β yang sama.
5. Setiap pengujian gugus kombinasi linier, memiliki nilai w yang lebih besar dari F_{tabel} sehingga mendapatkan kesimpulan H_0 ditolak.

Saran

Penelitian ini membahas prosedur akar dalam regresi linier berganda. Model yang diperoleh dari uji sekuensial belum dilakukan uji asumsi, sehingga penulis mengharapkan untuk penelitian selanjutnya dapat melakukan uji asumsi untuk memperoleh model regresi terbaik.

DAFTAR PUSTAKA

Draper, N dan H. Smith. 1992. *Analisis Regresi Terapan, Terjemahan Edisi Kedua*. Jakarta : PT. Gramedia Pustaka Utama

Kurniawan, D. 2008. *Regresi Linier*. http://ineddeni.files.wordpress.com//2008/07/regresi_linier.pdf.

Montgomery, S.C. 1976. *Design and Analysis of Experiment.* New York : Jhon Wiley & Sons.

Nugroho, S. 2008. *Dasar-dasar Rancangan Percobaan*. Bengkulu : UNIB Press.

Graybill, F. A. 1976. *Theory and Application of the Linier Model*. Colorado State University. California.

Pujiati, A. 1997. *Analisis Regresi Linier Berganda untuk Mengetahui Hubungan Antara Beberapa Aktifitas Promosi dengan Penjualan Produk.* http://blog.its.ac.id/SuherminStatistikaitsacid/files/2008/09/regresi-linier-berganda.pdf

Risza, A. A. 2008. *Autokorelasi dalam Regresi Linier Sederhana*. Skripsi Jurusan Matematika FMIPA. Universitas Bengkulu. Tidak Dipublikasikan.

Soemartini. 2008. *Principal Component Analysis (PCA) sebagai Salah Satu Metode untuk Mengatasi Masalah Multikolinearitas*. http://resources.unpad.ac.id/unpad-content/uploads/publikasi_dosen/PCA(PR QL COMP ANLS).pdf

Walpole, R. E dan R. H. Myers. 1995. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insiyur dan Ilmuwan, Terjemahan Edisi Keempat*. ITB. Bandung.

Takarada, A. 2008. *Model Regresi Linier Berganda dan Model Regresi Cobb-Douglas dalam Analisis Fungsi Produksi*. Skripsi Jurusan Matematika FMIPA. Universitas Bengkulu. Tidak Dipublikasikan.