HETEROSKEDASTISITAS DALAM REGRESI LINIER SEDERHANA

Andi Butsiawan Sukoco
Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Bengkulu

ABSTRAK

Asumsi klasik dalam regresi linier sederhana mengasumsikan bahwa varian dari error untuk pebah-peubah bebas yang diketahui merupakan suatu bilangan konstan (Homoskedastisitas). Asumsi ini seringkali dilanggar ketika menggunakan data cross section. Penyimpangan terhadap asumsi ini disebut heteroskedastisitas. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memberikan penjelasan mengenai pengertian heteroskedastisitas, akibat yang ditimbulkan heteroskedastisitas, cara mendeteksi keberadaan heteroskedastisitas, dan langkah-langkah remedial bagi permasalahan heteroskedastisitas. Salah satu cara mendeteksi keberadaan heteroskedastisitas adalah dengan melihat pola error yang dihasilkan dari persamaan regresi. Cara lain untuk mendeteksi heteroskedastisitas adalah menggunakan uji statistik, antara lain uji Golfeld Quant, uji White, uji Korelasi Rank Spearman, uji Park, uji Glejser dan uji Breusch Pagan Godfrey. Langkah remedial untuk mengatasi permasalahan heteroskedastisitas adalah dengan menggunakan metode kuadrat terkecil terboboti dan metode transformasi.

Kata Kunci : asumsi klasik, heteroskedastisitas, regresi linier, transformasi

I. PENDAHULUAN

Analisis regresi merupakan studi yang menjelaskan dan mengevaluasi hubungan antara suatu peubah bebas (independen) dengan satu peubah tak bebas (dependen) dengan tujuan untuk mengestimasi dan atau meramalkan nilai peubah tak bebas didasarkan pada nilai peubah bebas yang diketahui. Hubungan fungsional antara kedua jenis peubah tersebut dapat berbentuk linier maupun tidak linier. Model matematis dalam menjelaskan hubungan antarpeubah dalam analisis regresi menggunakan persamaan regresi.

Regresi pertama kali diperkenalkan oleh seorang antropolog Inggris yang bernama Sir Francis Galton pada tahun 1855, yang muncul karena pengamatannya terhadap tinggi badan beberapa orang anak dan orang tuanya. Regresi sebagai suatu teknik analisa telah dipergunakan secara luas, tidak hanya terbatas dalam bidang statistik namun juga di bidang-bidang lain seperti ekonomi, pertanian, sosial, teknik, riset/penelitian, dan bidang-bidang lainnya.

Salah satu jenis regresi yang sering digunakan untuk menggambarkan hubungan antara satu peubah bebas dengan satu peubah takbebas dalam bentuk persamaan linier disebut regresi linier sederhana.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad ; \; i = 1,2,\ldots,n \tag{1}$$

dengan :

Y_i = nilai peubah takbebas (dependen) ke-i.

X_i = nilai peubah bebas (independen) ke-i.

β_0, β_1 = parameter-parameter regresi yang tidak diketahui.

ε_i = nilai galat (error) ke-i.

Parameter β_0 dan β_1 pada persamaan regresi linier di atas diduga dengan $\hat{\beta}_0$ dan $\hat{\beta}_1$. Penduga parameter-parameter tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan metode kuadrat terkecil dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat error.

Penggunaan metode kuadrat terkecil dalam regresi linier harus memenuhi beberapa asumsi agar diperoleh penduga yang baik. Asumsi-asumsi yang harus dipenuhi tersebut sering disebut dengan asumsi klasik. Asumsi klasik tersebut mengharuskan hubungan antara *X* dengan *Y* bersifat linier, tidak ada korelasi antara error dengan peubah independen, tidak ada korelasi diantara error pengamatan, tidak ada multikolinieritas sempurna, dan error mengikuti distribusi Normal dengan rata-rata nol dan varian yang konstan (*Homoskedastisitas*) (Pindyck & Rubinfield, 1991).

Berdasarkan asumsi-asumsi tersebut penduga metode kuadrat terkecil merupakan penduga takbias linier terbaik (*BLUE = Best Linear Unbiased Estimator*). Penduga takbias linier terbaik (*BLUE*) merupakan penduga linier yang nilai dugaannya mendekati nilai parameter sesungguhnya (takbias) dan secara rata-rata mempunyai varian minimum (terkecil) diantara seluruh penduga takbias linier (Pindyck & Rubinfield, 1991).

Salah satu pelanggaran terhadap asumsi klasik yang sering terjadi ialah terjadinya heteroskedastisitas. Heteroskedastisitas terjadi jika varian dari error suatu pengamatan ke pengamatan lain terjadi ketidaksamaan (tidak konstan). Permasalahan heteroskedastisitas merupakan salah satu bentuk pelanggaran asumsi klasik yang dapat menimbulkan permasalahan yang cukup serius. Permasalahan heteroskedastisitas akan mempengaruhi sifat-sifat yang dimiliki penduga metode kuadrat terkecil sehingga memerlukan jalan keluar yang tepat untuk mengatasi permasalahan tersebut.

Berdasarkan latar belakang di atas, muncul ketertarikan untuk membahas lebih mendalam tentang heteroskedastisitas terutama dalam regresi linier sederhana, sehingga dapat menjelaskan secara lebih luas apa yang dimaksud dengan heteroskedastisitas, bagaimana cara untuk mendeteksi keberadaan heteroskedastisitas, apa akibat yang ditimbulkan heteroskedastisitas, dan bagaimana tindakan untuk mengatasi permasalahan heteroskedastisitas.

Tujuan dari penelitian ini adalah memberikan penjelasan tentang pengertian heteroskedastisitas, cara mendeteksi keberadaan heteroskedastisitas, akibat yang ditimbulkan heteroskedastisitas, dan cara mengatasi persoalan heteroskedastisitas, terutama dalam regresi linier sederhana.

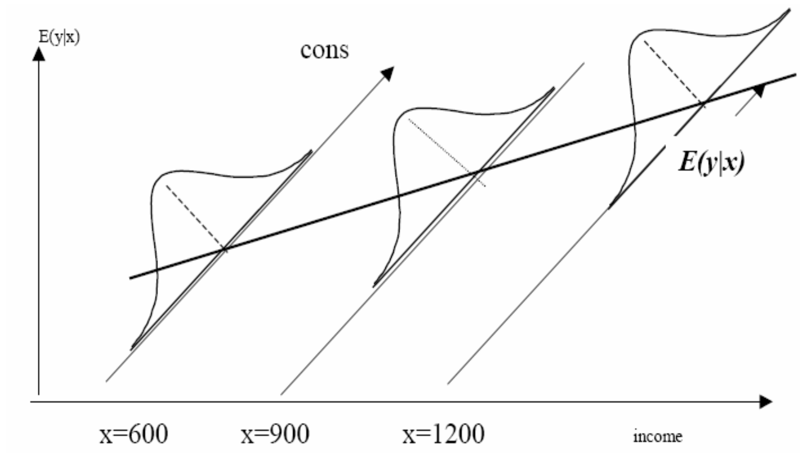
II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Heteroskedastisitas

Salah satu asumsi penting regresi linear klasik adalah bahwa varian dari error ε_i untuk peubah-peubah bebas yang diketahui (*independent or explanatory variables*), merupakan suatu bilangan konstan, artinya $Var\,(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i{}^2) = \sigma^2$ untuk semua *i*, $i = 1, 2, ..., n$, asumsi ini disebut homoskedastisitas. Jika terjadi homoskedastisitas (varian konstan) dan tidak terjadi autokorelasi (memiliki kovarian nol) maka akan menghasilkan matriks varian-kovarian error sebagai berikut:

$$V = E[\varepsilon\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n \qquad (2)$$

Secara grafis hal ini ditunjukkan pada gambar 1.

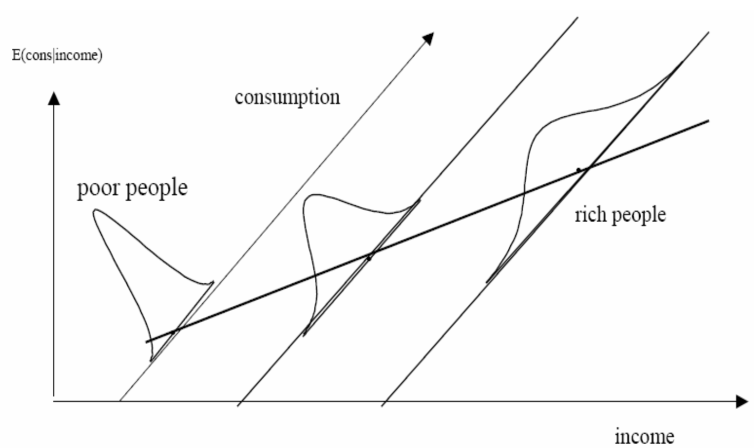


Gambar 1. Error dengan Sifat Homoskedastis

Salah satu bentuk penyimpangan/pelanggaran terhadap asumsi ini ialah terjadinya ketidakkonstanan varian dari setiap kesalahan pengganggu (error) atau sering disebut dengan heteroskedastisitas. Dalam keadaan heterokedastisitas, $Var\ (\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i{}^2) = \sigma_i^2$ untuk semua i, $i = 1, 2, ..., n$. Ketika terjadi heteroskedastisitas maka akan menghasilkan matriks varian-kovarian error sebagai berikut :

$$V = E[\varepsilon\varepsilon'] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Secara grafis hal ini ditunjukkan pada gambar 2.



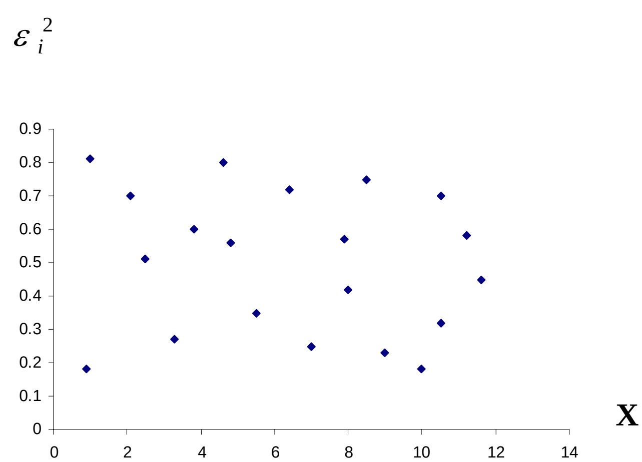
Gambar 2. Error dengan Sifat Heteroskedastis

Masalah heteroskedastisitas lebih sering muncul pada data *cross-section* dibandingkan data *time series*. Nachrowi dan Usman (2006) menjelaskan bahwa data *cross section* sering memunculkan varian error yang heteroskedastis, akan tetapi bukan berarti data *time series* terhindar dari permasalahan ini. Indeks harga saham, inflasi, nilai tukar, atau suku bunga, seringkali mempunyai varian error yang tidak konstan. Bila dalam suatu pengamatan terdapat kasus heteroskedastisitas sedangkan asumsi lain dipenuhi maka parameter regresi yang diduga dengan metode kuadrat terkecil tidak lagi memiliki sifat efisien (varian minimum) (Draper and Smith, 1992).

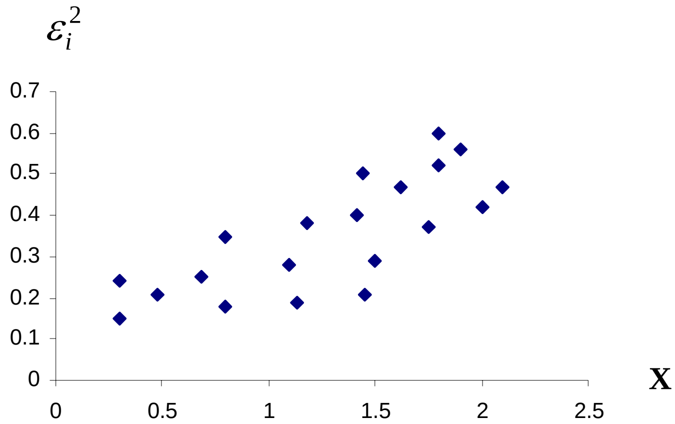
2.2 Pendeteksian Heteroskedastisitas

Pendeteksian keberadaan heteroskedastisitas dalam suatu model regresi linear dapat dilakukan dengan beberapa cara, diantaranya adalah dengan menggunakan metode grafik atau menggunakan uji statistik. Uji statistik yang dapat digunakan untuk mendeteksi heteroskedastisitas, antara lain uji Golfeld Quant, uji White, uji Korelasi Rank Spearman, uji Park, uji Glejser dan uji Breusch Pagan Godfrey.

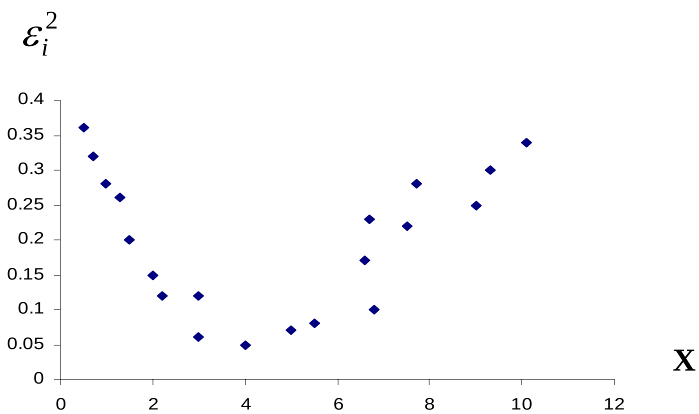
Metode grafik merupakan metode pendeteksi keberadaan heteroskedastisitas yang paling sederhana yang bekerja dengan cara menggambarkan tebaran error (error) yang diperoleh dari model regresi menurut urutan waktu/pengamatan. Cara alternatif dalam mempelajari pola error yaitu dengan menggambar error ε_i, atau harga mutlaknya $|\varepsilon_i|$ secara langsung terhadap X_i. Karena $Var(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^2)$, maka cara yang lebih baik untuk melihat pola error adalah menggambarkan ε_i^2 terhadap X_i. Beberapa gambaran antara ε_i^2 dengan X_i dapat dilihat pada gambar berikut :



Gambar 3. Pola Error yang Konstan



Gambar 4. Pola Error yang Membesar



Gambar 5. Pola Error yang Berbentuk Kurva

Pada gambar 3, tidak terlihat adanya pola error yang sistematis atau dapat dikatakan random. Artinya, tidak ada perbedaan $Var(\varepsilon_i^2)$ pada suatu tingkat nilai X_i atau sekelompok X_i (variannya homoskedastis). Pola error pada gambar 4 berbeda dengan pola error pada gambar 3, pada gambar 4 menunjukkan adanya pola error yang sistematik, dimana varian error semakin membesar seiring membesarnya nilai X_i. Sedangkan pada gambar 5 menunjukkan pola error yang nilai terbesarnya terletak pada titik-titik kritis dari grafik. Gambar 4 dan gambar 5 menunjukkan pola-pola error yang tidak konstan (heteroskedastis).

Salah satu kelemahan pengujian secara grafis adalah tidak jarang kita ragu terhadap pola yang ditunjukkan grafik. Keputusan secara subjektifd apat mengakibatkan perbedaaan keputusan antara satu orang dengan lainnya. Oleh karena itu dibutuhkan suatu prosedur formal yang dapat digunakan untuk mendeteksi heteroskedastisitas. Terdapat banyak uji statistik yang dikembangkan untuk mendeteksi keberadaan heteroskedastisitas, namun disini hanya akan dibahas dua metode yang paling populer, yaitu uji White dan uji Breusch Pagan Godfrey.

Salah satu uji statistik yang cukup terkenal dan hampir selalu dilampirkan pada setiap keluaran paket komputer untuk mendeteksi heteroskedastisitas adalah uji White. Uji White merupakan pendekatan yang lebih formal dalam mencari pola error. Uji ini mempunyai cara kerja dengan meregresikan ε_i terhadap semua peubah bebas yang ada. Uji ini mengasumsikan bahwa varian error merupakan fungsi yang mempunyai hubungan dengan peubah bebas, kuadrat masing-masing peubah bebas, dan interaksi antar peubah bebas.

Cara kerja uji White jika terdapat dua peubah bebas di dalam model, yaitu X_1 dan X_2, maka persamaan regresi ε_i adalah seperti berikut :

$$\varepsilon_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 X_1 + \alpha_3 X_2 + \alpha_4 X_1^2 + \alpha_5 X_2^2 + \alpha_6 X_1 X_2 + u_i \qquad (4)$$

Apabila koefisien dari semua X atau beberapa diantaranya terjadi perbedaan yang signifikan dari nol dalam uji t biasa, artinya $Var(\varepsilon_i)$ berubah-ubah dengan X_i, maka dapat dikatakan terjadi heteroskedastisitas.

White juga menunjukkan bahwa dengan jumlah sampel (*n*) yang cukup besar, hasil kali antara jumlah sampel dan kofisien determinasi (R^2) dari persamaan (4) sebanding dengan distribusi χ^2 dengan derajat bebas sama dengan jumlah parameter-parameter yang ada pada persamaan tersebut kecuali intercept. Jika nilai nR^2 melebihi nilai χ^2 maka dapat disimpulkan terjadi heteroskedastisitas.

Uji statistik lainnya yang dapat digunakan untuk menguji apakah varian dari error bersifat homoskedastik atau tidak adalah uji Breusch Pagan Godfrey. Pada prinsipnya, uji ini tidak jauh berbeda dengan uji lainnya, yaitu mencoba mengukur varian ε_i^2 akibat perubahan nilai-nilai peubah bebasnya.

Tahap-tahap dalam uji ini adalah:

1. Asumsikan $Var(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$ merupakan fungsi linier dari peubah non stokhastik Z, dimana Z adalah sebagian atau seluruh peubah X:

   $$\sigma_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 Z_1 + ... + \alpha_k Z_k \qquad (5)$$

2. Jika $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k$ maka $\sigma_i^2 = \alpha_0$, varian error konstan sehingga error homoskedastik.
3. Peubah bebas *X* dapat digunakan sebagai pengganti peubah *Z*
4. Estimasi model regresi

   $$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + ... + \beta_k x_{ki} + \varepsilon_i$$

5. Hitung $s = \sum \varepsilon_i^2 / n$ dan membangun $p_i = \dfrac{\varepsilon_i^2}{s}$
6. Regresikan p_i terhadap $\alpha_0 + \alpha_1 Z_1 + ... + \alpha_k Z_k$
7. Hitung $\theta = \dfrac{Jumlah\ Kuadrat\ Regresi(JKR)}{2} : \theta \sim \chi_k^2$
8. Error homoskedastik jika $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = ... = \alpha_k = 0$
9. Jika $\theta > \chi_k^2$ maka tolak Hipotesis nol, artinya error tidak homoskedastik.

Uji Breusch Pagan Godfrey memiliki beberapa kekurangan, yaitu uji ini tidak reliabel jika error tidak berdistribusi normal dan jika jumlah sampel kecil.

III. AKIBAT DAN CARA MENGATASI HETEROSKEDASTISITAS

Heteroskedastisitas merupakan salah satu persoalan yang sering terjadi dalam regresi linier. Permasalahan heteroskedastisitas mengakibatkan asumsi klasik mengenai kekonstanan varian error tidak terpenuhi dan akan berpengaruh terhadap sifat-sifat penduga metode kuadrat terkecil. Menurut Gujarati (1999), permasalahan heteroskedastisitas mengakibatkan :

- Penduga metode kuadrat terkecil masih tetap takbias dan konsisten, tetapi tidak lagi efisien (varian tidak lagi minimum).
- Simpangan baku (standar error) dari estimasi menjadi bias, sehingga uji t dan uji F menjadi tidak valid.

Thomas (1996) juga mengungkapkan pendapat yang serupa bahwa heteroskedastisitas mengakibatkan penduga metode kuadrat terkecil tidak lagi efisien, namun tetap linier, tak bias, dan konsisten.

Heteroskedastisitas tidak merusak sifat ketakbiasan dan konsistensi dari penduga metode kuadrat terecil, tetapi penduga menjadi tidak lagi efisien, sehingga membuat prosedur pengujian hipotesis yang biasa nilainya diragukan. Oleh karena itu, tindakan perbaikan sangat diperlukan. Ada dua pendekatan yang dapat digunakan untuk mengatasi permasalahan heteroskedastisitas. Jika σ_i^2 diketahui dan jika σ_i^2 tidak diketahui.

3.1 Nilai σ_i^2 diketahui

Jika σ_i^2 diketahui atau dapat diduga, metode yang digunakan untuk mengatasi permasalahan heteroskedastisitas adalah dengan menggunakan metode *Generalized Least Squares* (GLS). Metode ini sering disebut dengan Metode Kuadrat Terkecil Terboboti (*Weighted Least Squares*). Pembentukan model estimasi dengan menggunakan GLS pada dasarnya mempunyai dua tahap, yaitu melakukan transformasi data dasar analisis dan menerapkan metode kuadrat terkecil terhadap data yang telah ditransformasikan. Dengan menggunakan model :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \text{ dengan } Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 \qquad (6)$$

Apabila error ε_i ditransformasikan dengan cara membaginya dengan σ_i, dimana ε_i berada di bawah kondisi heteroskedastisitas, maka akan diperoleh error yang baru, yaitu $\varepsilon_i^* = \dfrac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$, yang memiliki varian konstan, yaitu:

$$\mathrm{var}(\varepsilon_i^*) = \mathrm{var}\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) = E\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_i^2} E(\varepsilon_i^2) = \left(\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\sigma_i^2 = 1 \qquad (7)$$

Jika dilakukan transformasi terhadap persamaan (1), dengan cara membaginya dengan σ_i, maka akan diperoleh error yang homoskedastik:

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_0 \left(\frac{1}{\sigma_i} \right) + \beta_1 \left(\frac{X_i}{\sigma_i} \right) + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \tag{8}$$

Persamaan di atas dapat juga ditulis:

$$Y_i^* = \beta_0 X_{0i}^* + \beta_1 X_i^* + \varepsilon_i^* \tag{9}$$

Dengan: $Y_i^* = \frac{Y_i}{\sigma_i}$, $X_{oi}^* = \frac{1}{\sigma_i}$, $X_i^* = \frac{X_i}{\sigma_i}$, $\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$.

Hal penting yang perlu dicatat dari persamaan (9) adalah bahwa persamaan tersebut sekarang tidak memiliki konstanta, karena konstanta sudah berubah menjadi variabel sebagai akibat dari proses pembagian dengan σ_i yang dapat dianggap sebagai pembobot (*weighted*).

Apabila dalam model estimasi metode kuadrat terkecil jumlah kuadrat errornya diminimasi, maka pada model estimasi GLS jumlah kuadrat error juga terminimasi. Dalam metode kuadrat terkecil, jumlah kuadrat error terminimasi secara langsung sedangkan pada GLS jumlah kuadrat error terminimasi secara tidak langsung. Bentuk jumlah kuadrat error dari model estimasi GLS dengan menggunakan pembobot dapat dilihat sebagai berikut:

$$\sum \left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i} \right)^2 = \sum \lambda_i \varepsilon_i^2 \tag{10}$$

dimana $\lambda_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ merupakan pembobot (Thomas, 1996).

3.2 Nilai σ_i^2 tidak diketahui

Dalam banyak pembuatan model regresi, nilai σ_i^2 hampir tidak pernah diketahui. Sebagai hasilnya metode kuadrat terkecil terboboti (*weighted least squares*) tidak bisa digunakan. Untuk menanggulangi masalah tersebut maka perlu digunakan asumsi untuk menentukan nilai σ_i^2 dan mentransformasi model asli (awal) sehingga model hasil transformasi menjadi homoskedastik. Gujarati (1999) menunjukkan beberapa cara yang digunakan untuk mengatasi permasalahan heteroskedastisitas jika σ_i^2 tidak diketahui, antara lain sebagai berikut:

3.2.1 Transformasi dengan $\frac{1}{X_i}$

Pada transformasi ini diasumsikan bahwa :

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 X_i^2 \tag{11}$$

Persamaaan (49) menyatakan bahwa varian error tidak mempunyai hubungan linier dengan peubah X_i, akan tetapi meningkat sebanding dengan nilai X_i^2. Dengan asumsi demikian, transformasi dilakukan dengan membagi model awal (persamaan 1) dengan X_i. Dengan demikian model menjadi :

$$\frac{Y_i}{X_i} = \beta_0\left(\frac{1}{X_i}\right) + \beta_1 + \left(\frac{\varepsilon_i}{X_i}\right) \tag{12}$$

atau dapat ditulis dengan :

$$Y_i^* = \beta_0 X_{0i}^* + \beta_1 + \varepsilon_i^* \tag{13}$$

Dimana $Y_i^* = \frac{Y_i}{X_i}$, $X_{0i}^* = \frac{1}{X_i}$, $\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{X_i}$.

Model pada persamaan (13) telah homoskedastik karena :

$$E(\varepsilon_i^{*2}) = E\left(\frac{\varepsilon_i^2}{X_i^2}\right) = \frac{1}{X_i^2} E(\varepsilon_i^2) = \frac{1}{X_i^2}(\sigma^2 X_i^2) = \sigma^2 \text{ konstan} \tag{14}$$

Hasil transformasi tersebut telah menyebabkan error konstan, dan berarti error telah homoskedastik. Oleh karena itu, sekarang metode kuadrat terkecil dapat digunakan dengan meregresikan $\frac{Y_i}{X_i}$ dengan $\frac{1}{X_i}$.

3.2.2 Transformasi dengan $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$

Pada transformasi ini diasumsikan bahwa:

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 X_i \tag{15}$$

Persamaan (53) menyatakan bahwa varian error mempunyai hubungan linier dengan peubah X_i. Dengan asumsi demikian, transformasi dilakukan dengan membagi model awal (persamaan 1) dengan $\sqrt{X_i}$. Dengan demikian model menjadi :

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \beta_0 \left(\frac{1}{\sqrt{X_i}} \right) + \beta_1 \sqrt{X_i} + \left(\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}} \right) \tag{16}$$

atau dapat ditulis dengan :

$$Y_i^* = \beta_0 X_{0i}^* + \beta_1 X_i^* + \varepsilon_i^* \tag{17}$$

Dimana $Y_i^* = \frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$, $X_{0i}^* = \frac{1}{\sqrt{X_i}}$, $X_i^* = \sqrt{X_i}$, $\varepsilon_i^* = \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}}$.

Model pada persamaan (17) telah homoskedastik karena :

$$E(\varepsilon_i^{*2}) = E\left(\frac{\varepsilon_i^2}{\sqrt{X_i^2}} \right) = \frac{1}{X_i} E(\varepsilon_i^2) = \frac{1}{X_i} (\sigma^2 X_i) = \sigma^2 \text{ konstan} \tag{18}$$

Hasil transformasi tersebut telah menyebabkan error konstan, dan berarti error telah homoskedastik.

3.2.3 Transformasi dengan $E(Y_i)$

Transformasi ini dilandasi dengan asumsi bahwa :

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2[E(Y_i)]^2 \tag{19}$$

Persamaan (19) menyatakan bahwa varian (ε_i) proporsional terhadap $[E(Y_i)]^2$. Dengan asumsi demikian, maka transformasi dilakukan dengan membagi model awal (persamaan 1) dengan $E(Y_i)$. Hasil transformasi adalah:

$$\frac{Y_i}{E(Y_i)} = \beta_0\left(\frac{1}{E(Y_i)}\right) + \beta_1\left(\frac{X_i}{E(Y_i)}\right) + \left(\frac{\varepsilon_i}{E(Y_i)}\right) \tag{20}$$

atau dapat ditulis dengan :

$$Y_i^* = \beta_0 X_{0i}^* + \beta_1 X_i^* + \varepsilon_i^* \tag{21}$$

Dimana $Y_i^* = \dfrac{Y_i}{E(Y_i)}$, $X_{0i}^* = \dfrac{1}{E(Y_i)}$, $X_i^* = \dfrac{X_i}{E(Y_i)}$, $\varepsilon_i^* = \dfrac{\varepsilon_i}{E(Y_i)}$

Model pada persamaan (21) telah homoskedastik karena :

$$E(\varepsilon_i^{*2}) = E\left(\frac{\varepsilon_i^2}{[E(Y_i)]^2}\right) = \frac{1}{[E(Y_i)]^2}E(\varepsilon_i^2) = \frac{1}{[E(Y_i)]^2}(\sigma^2[E(Y_i)]^2) = \sigma^2 \tag{22}$$

Permasalahan dalam transformasi ini adalah tidak diketahuinya nilai β_0 dan β_1, sehingga $E(Y_i)$ juga tidak dapat diketahui. Oleh karena itu, transformasi dapat dilakukan dengan memanfaatkan model regresi yang diduga, yaitu $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$, sehingga persamaan hasil transformasinya adalah:

$$\frac{Y_i}{\hat{Y}_i} = \beta_0\left(\frac{1}{\hat{Y}_i}\right) + \beta_1\left(\frac{X_i}{\hat{Y}_i}\right) + \left(\frac{\varepsilon_i}{\hat{Y}_i}\right) \tag{23}$$

3.2.4 Transformasi dengan Logaritma

Transformasi ini ditujukan untuk memperkecil skala antar peubah bebas. Dengan semakin sempitnya range nilai observasi, diharapkan variasi error juga tidak akan berbeda besar antar kelompok observasi. Adapun model yang digunakan adalah:

$$Ln\ Y_i = \beta_0 + \beta_1 Ln\ X_i + \varepsilon_i \tag{24}$$

IV. STUDI KASUS

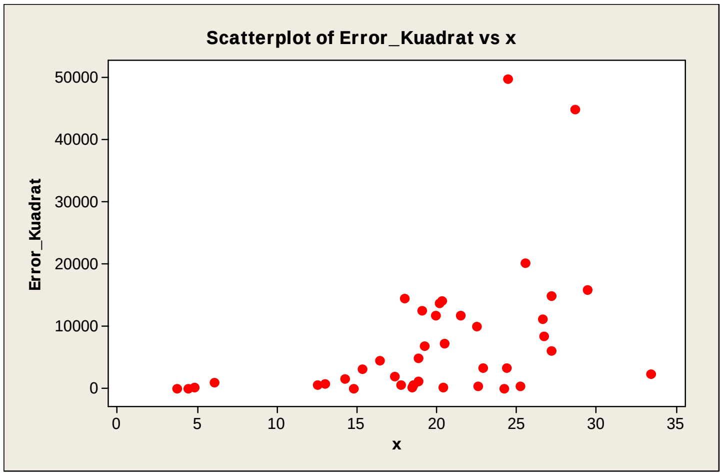
Metode Grafik merupakan cara yang paling sederhana untuk mendeteksi heteroskedastisitas. Metode grafik dapat memberikan gambaran mengenai pola tebaran error yang terbentuk sehingga dapat dijadikan langkah awal untuk mendeteksi keberadaan heteroskedastisitas.

Sebagaimana telah dijelaskan dalam bab II, heteroskedastisitas merupakan suatu kondisi dimana $Var(\varepsilon_i^2)$ tidak konstan. Dengan demikian, pada suatu nilai peubah bebas X_i atau sekelompok nilai X_i akan mempunyai nilai $Var(\varepsilon_i^2)$ yang berbeda dengan peubah bebas X_i atau sekelompok X_i lainnya. Oleh karena itu, jika nilai-nilai ε_i^2 diplot dengan nilai-nilai peubah bebas akan diperoleh suatu pola atau bentuk yang tidak acak.

Untuk menggambarkan suatu model regresi yang heteroskedastis, digunakan data pada Lampiran 1. Dari data diperoleh model regresi:

$$Y_i = 83.4160 + 10.2096 X_i + \varepsilon_i$$

Pola error yang dihasilkan dari model regresi diatas dapat dilihat dengan cara menggambarkan ε_i^2 terhadap X_i.



Gambar 6. Plot Error Kuadrat terhadap X_i dari Data 1

Berdasarkan gambar 6, dapat dilihat adanya pola error yang sistematik. Varian error semakin membesar seiring dengan membesarnya nilai X_i, sehingga disimpulkan terjadi heteroskedastisitas pada model di atas.

Penerapan uji White lebih mudah dibandingkan dengan uji statistik lainnya. Data yang digunakan juga data pada Lampiran 1. Langkah awal prosedur ini adalah meregresikan ε_i^2 terhadap X_i dan X_i^2. Setelah diregresikan diperoleh nilai $R^2 = 0.188876941$. Untuk n = 40, diperoleh nilai $LM = nR^2 = 7.555077642$. Nilai χ^2 dengan 2 derajat bebas dan $\alpha = 0,05$ adalah 5.991464547. Nilai $nR^2 > \chi^2$ menyebabkan hipotesis nol ditolak, sehingga dapat disimpulkan terjadi heterokedastisitas pada model tersebut.

4.1 Langkah Remedial

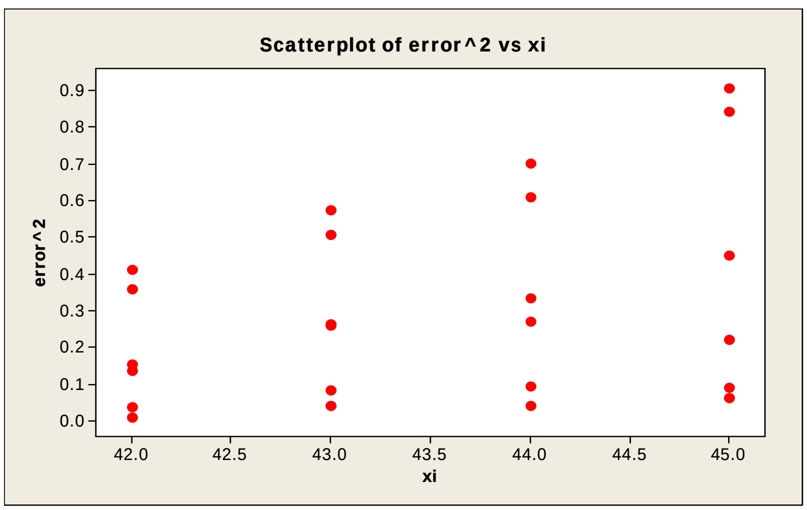
Heteroskedastisitas tidak merusak sifat ketakbiasan dan konsistensi dari penduga metode kuadrat terkecil, tetapi penduga tersebut tidak lagi efisien sehingga membuat prosedur pengujian hipotesis yang biasa nilainya diragukan. Ada beberapa cara yang dapat dilakukan untuk mengatasi heteroskedastisitas, yaitu:

4.1.1 Jika σ_i^2 diketahui

Jika σ_i^2 diketahui atau dapat diduga, metode yang digunakan yaitu Metode Kuadrat Terkecil Terboboti (*Weighted Least Squares*). Data yang digunakan adalah data pada Lampiran 2. Langkah pertama, data diregresikan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil biasa. Setelah diregresikan diperoleh model regresi sebagai berikut:

$$Y_i = -23.602 + 1.63 X_i + \varepsilon_i$$

Untuk mendeteksi adanya heteroskedastisitas dalam model, langkah awal yang dilakukan yaitu dengan memplot ε_i^2 terhadap peubah bebas X_i. Plot antara ε_i^2 dan peubah bebas X_i dari model regresi di atas dapat dilihat seperti di bawah ini:



Gambar 7. Plot Error Kuadrat Terhadap X_i dari Data 2

Langkah selanjutnya adalah menghitung nilai varian dari error dan menentukan pembobotnya (σ_i). Kemudian persamaan di atas ditransformasi dengan cara membagi dengan σ_i. Dari hasil transformasi diperoleh model regresi yang baru yaitu:

$$Y_i^* = -23.3259 X_{0i}^* + 1.6237 X_i^* + \varepsilon_i^*$$

Model regresi di atas tidak memiliki konstanta, karena konstanta sudah berubah menjadi variabel sebagai akibat dari proses pembagian dengan σ_i yang dapat dianggap sebagai pembobot. Error dari model regresi di atas sudah homoskedastis. Hal ini dapat dibuktikan dengan menghitung varian error hasil regresi, dimana $\text{var}(\varepsilon_i^*) = 1$. Pengujian dengan menggunakan Uji White juga menunjukkan bahwa error telah hommoskedastik, karena nilai LM = 2.809 < $\chi^2_{4,0.05} = 9.488$, sehingga H_0 tidak ditolak.

4.1.2 Jika σ_i^2 tidak diketahui

Dalam banyak penelitian, nilai σ_i^2 jarang diketahui. Oleh karena itu, metode kuadrat terkecil terboboti (*weighted least squares*) tidak bisa digunakan. Untuk menanggulangi masalah tersebut, perlu digunakan asumsi untuk menentukan nilai σ_i^2. Untuk kasus pada data dalam Lampiran 1 dapat dilihat bahwa varian error proporsional terhadap X_i, varian error semakin membesar seiring dengan membesarnya nilai X_i. Untuk kasus seperti ini dapat diatasi dengan cara membagi model awal dengan $\sqrt{X_i}$. Model regresi hasil transformasi adalah:

$$Y_i^* = 78.684 X_{0i}^* + 10.451 X_i^* + \varepsilon_i^*$$

Hasil transformasi tersebut telah menyebabkan error konstan, berarti error telah homoskedastis. Pengujian dengan menggunakan Uji White menunjukkan bahwa error dari model hasil transformasi telah homoskedastik. Nilai *LM* yang dihasilkan adalah 7.261, sedangkan nilai $\chi^2_{4,0.05} = 9.488$. Karena nilai LM < chi-square, maka H_0 tidak ditolak.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Salah satu asumsi penting regresi linear klasik adalah bahwa varian dari error ε_i untuk peubah-peubah bebas yang diketahui (*independent or explanatory variables*), merupakan suatu bilangan konstan, artinya $Var\,(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i{}^2) = \sigma^2$ untuk semua *i*,

$i = 1, 2, ..., n$, asumsi ini disebut homoskedastisitas. Salah satu bentuk penyimpangan/pelanggaran terhadap asumsi homoskedastisitas adalah terjadinya ketidakkonstanan varian dari setiap kesalahan pengganggu (error) atau sering disebut dengan heteroskedastisitas. Dalam keadaan heterokedastisitas, $Var\,(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i{}^2) = \sigma_i^2$ untuk semua i, $i = 1, 2, ..., n$ .Heteroskedastisitas mengakibatkan penduga metode kuadrat terkecil tidak lagi efisien, namun tetap linier, tak bias, dan konsisten.

Pendeteteksian keberadaan heteroskedastisitas dapat dilakukan dengan mengunakan metode grafik atau uji statistik. Uji statistik yang dapat digunakan diantaranya adalah uji Goldfield-Quant, uji White, uji Korelasi Rank Spearman, uji Park, uji Glejser dan uji Breusch Pagan Godfrey. Apabila σ_i^2 diketahui atau dapat diduga, metode yang digunakan untuk mengatasi permasalahan heteroskedastisitas adalah Metode Kuadrat Terkecil Terboboti (*Weighted Least Squares*). Akan tetapi bila σ_i^2 tidak diketahui, permasalahan heteroskedastisitas dapat diatasi dengan melakukan transformasi terhadap model.

5.2 Saran

Kajian pada skripsi ini menitikberatkan permasalahan heteroskedastisitas yang terjadi pada model regresi linier sederhana. Penelitian lebih lanjut dapat membahas permasalahan heteroskedastisitas dengan ruang lingkup pembahasan yang lebih luas dan dengan contoh-contoh kasus yang lebih beragam sehingga dapat menambah pengetahuan tentang permasalahan heteroskedastisitas. Skripsi ini mudah-mudahan dapat bermanfaat dan menambah wawasan di bidang regresi, khususnya mengenai permasalahan heteroskedastisitas.

DAFTAR PUSTAKA

Algifari. 2000. *Analisis Regresi Teori, Kasus, dan Solusi*. Edisi 2. BPFE Yogyakarta.Yogyakarta

Draper, N.R. dan H. Smith. 1992. *Analisis Regresi Terapan.* edisi kedua. PT Gramedia Pustaka Utama. Jakarta.

Gujarati, D. 1999. *Ekonometrika Dasar*. edisi keenam. Penerbit Erlangga. Jakarta.

Hines, W.W dan D.C Montgomery. 1990. *Probabilitas dan Statistik dalam Ilmu Rekayasa dan Manajemen*. Universitas Indonesia. Jakarta.

Nachrowi, D. & Usman. 2006. *Penggunaan Teknik Ekonometri Pendekatan Populer dan Praktis.* Edisi Revisi. PT Raja Grafindo Persada. Jakarta.

Neter, J. *et al*. 2005. *Applied Linear Statistical Models*. 5th ed. McGraw-Hill Companies Inc. New York.

Pindyck, R.S. & D.L. Rubinfield. 1991. *Econometrics Model & Economic Forecast*. 3rd ed. Mc Graw-Hill International Edition. Singapore.

Sembiring, R.K. 2003. *Analisis Regresi*. Penerbit ITB. Bandung.

Supranto, J. 1984. *Ekonometrika*. Jilid 2. Lembaga Penerbit Fakultas Ekonomi Universitas Indonesia. Jakarta.

Thomas, R.L. 1996. *Modern Econometrics An Introduction.* Addison-Wesley. England.