# KAJIAN PROSEDUR *SUM-TO-ZERO* DAN *SET-TO-ZERO* DALAM RANCANGAN PERCOBAAN

**Dwi Ayu Pritawaty[1], Sigit Nugroho[2], dan Jose Rizal[2]**
[1]Alumni Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu
[2]Staf Pengajar Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

**ABSTRAK**

Pada model rancangan kadangkala diperoleh $r(\underline{X}) \leq k$ sehingga penduga parameter regresi tersebut dapat menggunakan persamaan $\underline{\hat{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-}\underline{X}'Y$. Selain menggunakan $\underline{\hat{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-}\underline{X}'Y$ yang mencari kebalikan umum dari $\underline{X}'\underline{X}$, beberapa hal yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan prosedur *Sum-to-Zero* atau prosedur *Set-to-Zero* pada parameternya. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis data yang tidak seimbang dengan kajian prosedur *Sum-to-Zero* dan *Set-to-Zero*, menentukan penduga parameter serta prosedur uji Analisis Keragaman (ANAVA).

Kata Kunci: *Sum-to-Zero* dan *Set-to-Zero*

## PENDAHULUAN

Dalam statistik terdapat beberapa model yang dapat dipakai, salah satunya yaitu model linier. Model linier dapat dikelompokkan menjadi model kualitatif dan model kuantitatif. Model kualitatif meliputi model rancangan dan komponen dari model varian. Sedangkan model kuantitatif meliputi model linier secara umum dan model linier regresi [3].

Suatu percobaan merupakan suatu penelaahan ilmiah terencana yang dirancang untuk meneliti satu atau lebih populasi [9]. Rancangan percobaan merupakan bagian dari rancangan penelitian ilmiah. Rancangan percobaan dikenal juga sebagai rancangan lapangan [6].

Jenis-jenis rancangan percobaan dapat dikelompokkan berdasarkan rancangan dasar atau lingkungan dengan berbagai kombinasi pola percobaan diantaranya: keseimbangan jumlah ulangan, jumlah faktor yang diujikan dan pengacakan di lapangan. Pola percobaan berdasar keseimbangan jumlah ulangan dapat dibedakan menjadi dua yaitu seimbang (*complete*) dan tidak seimbang (*incomplete*) [1].

Kombinasi variabel tetap dan variabel random dalam model linear menghasilkan metode analisis yang berbeda. ANOVA (*Analysis of Variance*) memerlukan prasyarat varibel prediktor merupakan variabel tetap dan variabel respon terdiri dari variabel random.

Matriks (*matrix*) adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan atau peubah acak. Bilangan-bilangan atau peubah acak-peubah acak dalam jajaran tersebut disebut entri dari matriks dan dapat juga diartikan kumpulan bilangan atau peubah acak disusun secara khusus dalam bentuk baris dan kolom sehingga membentuk empat persegi panjang atau bujur sangkar. Jika $A$ adalah matriks bujur sangkar, dan jika terdapat matriks $B$ yang ukurannnya sama sedemikian rupa sehingga $AB = BA = I$, maka $A$ disebut dapat dibalik (*invertible*) dan $B$ disebut sebagai kebalikan atau invers (*inverse*) dari $A$. Jika matiks $B$ tidak memenuhi $AB = BA = I$, maka $A$ dinyatakan sebagai matriks singular ([2]; [10]).

Secara aljabar model regresi linier dapat dituliskan dalam bentuk:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_{k-1} X_{ik-1} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \cdots, n \tag{1.1}$$

Misalkan:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \ \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_{1k-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_{2k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_{nk-1} \end{bmatrix}, \ \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \end{bmatrix}, \ \text{dan} \ \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Bentuk matriks dari model regresi linier dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\underline{Y}_{n\times 1} = \underline{X}_{n\times k} \, \underline{\beta}_{k\times 1} + \underline{\varepsilon}_{n\times 1} \tag{1.2}$$

di mana

| | | |
|---|---|---|
| $\underline{Y}$ | : | Vektor pengamatan berukuran $n \times 1$ |
| $\underline{X}$ | : | Matriks konstanta yang diketahui atau matriks rancangan berukuran $n \times k$ |
| $\underline{\beta}$ | : | Vektor parameter yang tidak diketahui berukuran $k \times 1$ |
| $\underline{\varepsilon}$ | : | Vektor galat berukuran $n \times 1$ |

Matriks dari tipe (1.2) dapat digunakan untuk menggambarkan sembarang tipe dari model, seperti model rancangan, model regresi, serta model covarian.

Persamaan normal model linier pada persamaan (1.1) adalah:

$$\underline{X}'\underline{X}\hat{\underline{\beta}} = \underline{X}'\underline{Y} \tag{1.3}$$

Jika $r(\underline{X}) = k$, yang juga menunjukkan bahwa $r(\underline{X}'\underline{X}) = k$ dan $\underline{X}'\underline{X}$ invertibel, maka solusi dari persamaan (1.3) diatas adalah:

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-1}\underline{X}'\underline{Y} \tag{1.4}$$

Jika $r(\underline{X}) \leq k$, yang juga menunjukkan bahwa $r(\underline{X}'\underline{X}) \leq k$ dan $\underline{X}'\underline{X}$ tidak invertibel, maka solusi dari persamaan (1.3) diatas adalah:

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{X}'\underline{X})^{-}\underline{X}'\underline{Y} \tag{1.5}$$

di mana $(\underline{X}'\underline{X})^{-}$ adalah matriks kebalikan umum.

Pada model regresi linier diperoleh $r(\underline{X}) = k$ sehingga penduga parameter regresi dapat dicari dengan menggunakan persamaan (1.4). Prosedur Doo-Little dan Akar Kuadrat dapat digunakan selain untuk mencari penduga parameter regresi juga digunakan untuk analisis regresi yang lainnya.

Pada model rancangan, diperoleh $r(\underline{X}) \leq k$ sehingga penduga parameter regresi tersebut dapat menggunakan persamaan (1.5). Selain menggunakan (1.5) yang mencari kebalikan umum dari $\underline{X}'\underline{X}$, beberapa hal yang dapat dilakukan adalah dengan menggunakan prosedur Dekomposisi QR, *Sum-to-Zero* dan *Set-to-Zero* pada parameternya.

Berdasarkan uraian di atas, penulis tertarik untuk mempelajari dan menganalisis data dengan ulangan dari tiap kombinasi yang tidak sama dengan menggunakan kajian prosedur *Sum-to-Zero* dan prosedur *Set-to-Zero*, menentukan penduga parameter, dan prosedur uji Analisis Keragaman (ANAVA) dengan menggunakan bantuan Microsoft Excel dan SPSS versi 16.

## RANCANGAN PERCOBAAN

Percobaan pada umumnya dilakukan untuk mendapatkan informasi tentang populasi. Informasi yang diperoleh tersebut dapat digunakan antara lain yaitu inferensia tentang parameter populasi, membuat keputusan tentang hipotesis yang telah dibuat, dan merencanakan riset berikutnya [9]. Oleh karena itu secara teoritis, percobaan diartikan sebagai tes [8] atau penyelidikan terencana untuk mendapatkan fakta baru [11], jelas bahwa tujuan percobaan adalah menjawab satu atau lebih pertanyaan untuk mendapatkan informasi maksimum.

**a. Definisi Rancangan Percobaan**

Rancangan percobaan dapat diartikan sebagai tes atau serangkaian tes dimana perubahan yang berarti dilakukan pada variabel dari suatu proses atau sistem sehingga dapat diamati dan diidentifikasi penyebab perubahan pada respon output [8]. Sedangkan menurut [7] rancangan percobaan merupakan hal yang sangat berhubungan dengan perencanaan penelitian untuk mendapatkan informasi maksimum dari bahan-bahan yang tersedia.

➢ **Struktur dari Rancangan Percobaan**

Rancangan percobaan terdiri dari dua struktur dasar yaitu struktur perlakuan (*Treatment structure)* dan struktur rancangan (*Design structure*) sebagai berikut:

1. Struktur Perlakuan (*Treatment structure)*

Struktur perlakuan terdiri dari set perlakuan, kombinasi perlakuan, atau populasi yang telah dipilih oleh peneliti untuk dipelajari atau dibandingkan. Struktur perlakuan yang berupa sekumpulan $t$ perlakuan disebut sebagai struktur perlakuan satu arah (tunggal), bila terdiri dari sebuah set kombinasi perlakuan disebut dengan faktorial.

2. Struktur Rancangan (*Design structure*)

Struktur rancangan meliputi pengelompokan satuan-satuan percobaan dalam kelompok-kelompok yang homogen. Bila satuan percobaan relatif homogen maka tidak perlu dilakukan pengelompokan, tetapi bila tidak maka satuan-satuan percobaan yang homogen dimasukkan kedalam satu kelompok yang berbeda dengan kelompok lainnya.

➢ **Tiga Prinsip Utama dalam Rancangan Percobaan**

Prinsip utama suatu rancangan percobaan adalah ulangan, pengacakan, dan pengelompokan, seperti uraian berikut ini:

1. Ulangan

Ulangan adalah diterapkannya satu perlakuan kepada lebih dari satu satuan percobaan [5] atau frekuensi (banyaknya) suatu perlakuan yang diselidiki dalam suatu percobaan. Jumlah ulangan suatu perlakuan tergantung pada derajat ketelitian yang diinginkan oleh peneliti terhadap kesimpulan hasil percobaannya [4].

2. Pengacakan

Pengacakan adalah yang mendasari metode statistika dalam rancangan percobaan. Pengacakan adalah penerapan perlakuan kepada satuan percobaan sehingga semua atau setiap satuan percobaan mempunyai peluang yang sama untuk menerima suatu perlakuan. Konsep pengacakan ini berlaku juga untuk pengambilan subsampel atau penentuan satuan pengamatan.

3. Pengelompokan

Pengelompokan adalah teknik yang digunakan untuk meningkatkan ketelitian percobaan. Pengelompokan dilakukan kalau terdapat sumber keragaman yang dapat diketahui dan pengaruhnya dapat diperkirakan.

**b. Analisis Varian (ANAVA)**

Analisis varian (ANAVA) merupakan proses pembagian total keragaman pengamatan percobaan kedalam porsi sumber-sumber keragaman yang ada. Dari ANAVA dapat diduga keragaman populasi perlakuan dengan suatu kuantiti yang disebut Galat Percobaan (*Experimental Error*) yang menunjukkan besarnya keragaman yang tak terhitung [9].

- **Tipe ANAVA**

Pemilihan tipe ANAVA tergantung dari rancangan percobaan (*experiment design*) yang dipilih, antara lain:

1. ANAVA satu arah

Sampel dibagi menjadi beberapa kategori dan ulangan di mana kolom menyatakan kategori dan baris menyatakan ulangan.

2. ANAVA dua arah tanpa interaksi

Pada rancangan percobaaan dengan ANAVA jenis ini, setiap kategori mempunyai banyak blok yang sama, sehingga jika banyak kolom $(k)$ dan banyak baris/blok $(r)$, maka banyak data adalah $N = r\, x\, k$.

3. ANAVA dua arah dengan interaksi

Dalam kategori ini, terdapat blok/sub-kelompok di mana kolom dinyatakan dengan kategori-1 dan baris/ blok dinyatakan dengan kategori-2. Setiap blok diulang, satu sel berisi beberapa data .

- **Tabel ANAVA**

Untuk memudahkan perhitungan ANAVA pada struktur perlakuan dua arah dengan interaksi, dapat dibahas tabel ANAVA sebagai berikut:

Tabel 1. ANAVA Dua Arah dengan Interaksi

| Sumber Keragaman | Derajat Bebas $(db)$ | Jumlah Kuadrat $(JK)$ | Kuadrat Tengah $(KT)$ | $F_{\text{hitung}}$ | $F_{\text{Tabel}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Baris | $t-1$ | $JKB$ | $KTB = \frac{JKB}{t-1}$ | $\frac{KTB}{KTG}$ | $F_{\alpha;t-1;n..-(tb)}$ |
| Kolom | $b-1$ | $JKK$ | $KTK = \frac{JKK}{b-1}$ | $\frac{KTK}{KTG}$ | $F_{\alpha;b-1;n..-(tb)}$ |
| Interaksi $[BK]$ | $(t-1)(b-1)$ | $JK[BK]$ | $KT[BK] = \frac{JK[BK]}{(t-1)(b-1)}$ | $\frac{KTK}{KT[BK]}$ | $F_{\alpha;(t-1)(b-1);n..-(tb)}$ |
| Galat | $n..-(tb)$ | $JKG$ | $KTG = \frac{JKG}{n..-(tb)}$ | | |
| Total | $n..-1$ | $JKT$ | | | |

Efek interaksi diperoleh setelah setiap kolom (perlakuan) dan baris (blok) diulang. Interaksi dinyatakan sebagai perkalian baris dan kolom.

## PROSEDUR *SUM-TO-ZERO* DAN *SET-TO-ZERO*

### a. Model Struktur Perlakuan Dua Arah

Suatu bentuk model rata-rata yang digunakan untuk percobaan berfaktor pada rancangan acak lengkap dengan $t$ taraf perlakuan pertama dan $b$ taraf perlakuan ke dua adalah:

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk};\ i = 1,2,\cdots,t;\ j = 1,2,\cdots,s;\ k = 1,2,\cdots,n_{ij} \tag{3.1}$$

di mana:

$Y_{ijk}$ : Nilai pengamatan yang memperoleh taraf ke-$i$ perlakuan pertama, taraf ke-$j$ perlakuan ke dua dan pada perulangan ke-$k$

| | | |
|---|---|---|
| $\mu_{ij}$ | : | Rataan pengaruh taraf ke-$i$ perlakuan pertama dan taraf ke-$j$ perlakuan ke dua |
| $\varepsilon_{ijk}$ | : | Komponen galat ke-$ijk$ |

Model yang digunakan pada persamaan (3.1), disebut model rata-rata, dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$
\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{11n_{11}} \\ y_{121} \\ \vdots \\ y_{12n_{12}} \\ \vdots \\ y_{1b1} \\ \vdots \\ y_{1bn_{1b}} \\ y_{211} \\ \vdots \\ y_{21n_{21}} \\ \vdots \\ y_{ib1} \\ \vdots \\ y_{ibn_{ib}} \end{bmatrix}_{n_{..}\times 1}
=
\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}_{n_{..}\times ts}
\begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \vdots \\ \mu_{1b} \\ \mu_{21} \\ \vdots \\ \mu_{ts} \end{bmatrix}_{ts\times 1}
+
\begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \vdots \\ \varepsilon_{11n_{11}} \\ \varepsilon_{121} \\ \vdots \\ \varepsilon_{12n_{12}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1b1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1bn_{1b}} \\ \varepsilon_{211} \\ \vdots \\ \varepsilon_{21n_{21}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ib1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ibn_{ib}} \end{bmatrix}_{n_{..}\times 1}
$$

Bila dituliskan dalam model pengaruh perlakuan, persamaan (3.1) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk};\ i = 1,2,\cdots,t;\ j = 1,2,\cdots,b;\ k = 1,2,\cdots,n_{ij} \qquad (3.2)$$

di mana:

| | | |
|---|---|---|
| $Y_{ijk}$ | : | Nilai pengamatan yang memperoleh taraf ke-$i$ perlakuan pertama, taraf ke-$j$ perlakuan ke dua pada perulangan ke-$k$ |
| $\mu$ | : | Rataan umum |
| $\tau_i$ | : | Pengaruh taraf ke-$i$ perlakuan pertama |
| $\beta_j$ | : | Pengaruh taraf ke-$j$ perlakuan ke dua |
| $\gamma_{ij}$ | : | Pengaruh interaksi taraf ke-$i$ perlakuan pertama dan taraf ke-$j$ perlakuan ke dua |
| $\varepsilon_{ijk}$ | : | Komponen galat ke-$ijk$ |

Bentuk matriks dari model pengaruh dua arah adalah

$$\begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{11n_{11}} \\ y_{121} \\ \vdots \\ y_{12n_{12}} \\ \vdots \\ y_{1b1} \\ \vdots \\ y_{1bn_{1b}} \\ y_{211} \\ \vdots \\ y_{21n_{21}} \\ \vdots \\ y_{ib1} \\ \vdots \\ y_{ibn_{ib}} \end{bmatrix}_{n_{..}\times 1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n_{..}\times(t+1)(b+1)} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_t \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_b \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \vdots \\ \gamma_{1b} \\ \gamma_{21} \\ \vdots \\ \gamma_{tb} \end{bmatrix}_{(t+1)(b+1)\times 1} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \vdots \\ \varepsilon_{11n_{11}} \\ \varepsilon_{121} \\ \vdots \\ \varepsilon_{12n_{12}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1b1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1bn_{1b}} \\ \varepsilon_{211} \\ \vdots \\ \varepsilon_{21n_{21}} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ib1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{ibn_{ib}} \end{bmatrix}_{n_{..}\times 1}$$

**b. Metode Kuadrat Terkecil**

Tahapan selanjutnya pada analisis adalah mendapatkan estimasi parameter $\underline{\beta}$. Metode kuadrat terkecil dapat digunakan untuk mendapatkan estimasi parameter dari model. Untuk menggunakan metode ini, asumsikan bahwa model dapat dibentuk sebagai berikut:

$$y_i = f\left(x_i; \underline{\beta}\right) + \varepsilon_i;\ i = 1,2,\cdots,n \tag{3.3}$$

di mana $f\left(x_i; \underline{\beta}\right)$ adalah fungsi dari vektor dari variabel rancangan yang diindikasikan dengan $x_i$ dan tergantung pada parameret $\underline{\beta}$. Estimasi kuadrat terkecil dari $\underline{\beta}$ biasanya dinotasikan dengan $\underline{\hat{\beta}}$, yaitu melalui $\underline{\beta}$ yang meminimumkan:

$$SS\left(\underline{\beta}\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f\left(x_i; \underline{\beta}\right)\right]^2 \tag{3.4}$$

Jika asumsi model pada persamaan (3.3) adalah $\varepsilon_i \sim iid\ N(0, \sigma^2);\ i = 1,2,\cdots,n$, maka estimasi kuadrat terkecil dari $\underline{\beta}$ juga merupakan estimasi maksimum likelihood.

Fungsi model untuk model rata-rata pada persamaan (3.1) dari struktur perlakuan dua arah pada rancangan acak lengkap adalah:

$$f\left(x_{ijk}; \underline{\beta}\right) = \mu_{ij};\ i = 1,2,\cdots,t;\ j = 1,2,\cdots,b;\ k = 1,2,\cdots,n_{ij}$$

Estimasi kuadrat terkecil dari $\mu_{ij}$ adalah nilai $\hat{\mu}_{11}, \cdots, \hat{\mu}_{ib}$ dicari dengan meminimumkan persamaan berikut:

$$SS\left(\underline{\mu}\right) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{b} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \left(Y_{ijk} - \mu_{ij}\right)^2 \tag{3.5}$$

Fungsi model untuk model pengaruh dari struktur perlakuan dua arah pada rancangan acak lengkap adalah:

$$f\left(x_{ijk}; \underline{\beta}\right) = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij};\ i = 1,2,\cdots,t;\ j = 1,2,\cdots,b;\ k = 1,2,\cdots,n_{ij}$$

Estimasi kuadrat terkecil dari $\mu, \tau_i, \underline{\beta_j}$, dan $\gamma_{ij}$ dicari dengan meminimumkan persamaan berikut:

$$SS(\mu, \tau_i, \beta_j, \gamma_{ij}) = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\left(Y_{ijk} - \mu - \tau_i - \beta_j - \gamma_{ij}\right)^2$$

Pada umumnya, model dapat dituliskan dalam bentuk matriks dari persamaan (1.1), dan estimasi kuadrat terkecil dari $\underline{\beta}$ adalah nilai $\underline{\hat{\beta}}$, yaitu melalui $\underline{\beta}$ yang meminimumkan:

$$SS\left(\underline{\beta}\right) = \left(\underline{Y} - \underline{X}\underline{\beta}\right)'\left(\underline{Y} - \underline{X}\underline{\beta}\right) \tag{3.6}$$

Matriks rancangan $\underline{X}$, pada model (3.1) berukuran $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \times ts$ dengan $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} > ts$ dan $r\left(\underline{X}\right) = ts$, yang juga menunjukkan bahwa $r\left(\underline{X}'\underline{X}\right) = ts$ dengan demikian $\underline{X}'\underline{X}$ invertibel.

Namun matriks rancangan $\underline{X}$, pada model (3.2) berukuran $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{b} n_{ij} \times (t+1)(b+1)$ dengan $r\left(\underline{X}\right) < (t+1)(b+1)$, yang juga menunjukkan bahwa $r\left(\underline{X}'\underline{X}\right) < (t+1)(b+1)$ yang berakibat $\underline{X}'\underline{X}$ tidak invertibel. Agar $\underline{X}'\underline{X}$ invertibel, dilakukan dengan cara mengurangi sebanyak kolom yang terpaut linier, diantaranya dilakukan dengan menggunakan prosedur *Sum-to-Zero* atau prosedur *Set-to-Zero* sebagai berikut:

- **Prosedur *Sum-to-Zero***

Prosedur *Sum-to-Zero* adalah suatu teknik yang menggunakan asumsi bahwa jumlah pengaruh parameter sama dengan nol. Prosedur ini selanjutnya digunakan untuk membuat persamaan normal yang dianalisis. Untuk model pengaruh dua arah, pembatasan prosedur *Sum-to-Zero* adalah sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{t}\tau_i = 0 \text{ atau } \tau_t = -\sum_{i=1}^{t-1}\tau_i \tag{3.7}$$

$$\sum_{j=1}^{b}\beta_j = 0 \text{ atau } \beta_b = -\sum_{j=1}^{b-1}\beta_j \tag{3.8}$$

$$\sum_{i=1}^{t}\gamma_{ij} = 0 \text{ atau } \gamma_{it} = -\sum_{i=1}^{t-1}\gamma_{ij}\,; \quad j = 1,2,\cdots,b \tag{3.9}$$

$$\sum_{j=1}^{b}\gamma_{ij} = 0 \text{ atau } \gamma_{bj} = -\sum_{j=1}^{b-1}\gamma_{ij}\,; \quad i = 1,2,\cdots,t \tag{3.10}$$

Agar $\underline{X}'\underline{X}$ invertibel, dilakukan dengan cara mengurangi sebanyak kolom yang terpaut linier ($\underline{X}^*$) sehinga persamaan (1.2) pada prosedur *Sum-to-Zero* dapat ditulis kembali dalam bentuk sebagai berikut:

$$\underline{Y} = \underline{X}^*\underline{\beta}^* + \underline{\varepsilon} \tag{3.11}$$

di mana $\underline{X}^*$ invertibel.

Metode kuadrat terkecil digunakan untuk mencari penduga $\underline{\hat{\beta}}^*$ dari parameter $\underline{\beta}^*$ pada persamaan (3.11) yang diperoleh dengan meminimumkan jumlah kuadrat

$$\begin{aligned} SS\left(\underline{\beta}^*\right) &= \left(\underline{Y} - \underline{X}^*\underline{\beta}^*\right)'\left(\underline{Y} - \underline{X}^*\underline{\beta}^*\right) \\ &= \left(\underline{Y}' - \underline{\beta}^{*'}\underline{X}^{*'}\right)\left(\underline{Y} - \underline{X}^*\underline{\beta}^*\right) \end{aligned}$$

$$= \underline{Y}'\underline{Y} - \underline{Y}'\underline{X}^*\underline{\beta}^* - \underline{\beta}^{*'}\underline{X}^{*'}\underline{Y} + \underline{\beta}^{*'}\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\underline{\beta}^*$$
$$= \underline{Y}'\underline{Y} - 2\underline{X}^*\underline{\beta}^{*'}\underline{X}^{*'}\underline{y} + \underline{\beta}^{*'}\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\underline{\beta}^* \quad (3.12)$$

Karena $\underline{\beta}^{*'}\underline{X}^{*'}\underline{Y}$ adalah suatu matrik berukuran $1 \times 1$ atau suatu skalar, maka $\left(\underline{\beta}^{*'}\underline{X}^{*'}\underline{Y}\right)' = \underline{Y}'\underline{X}^*\underline{\beta}^*$. Kemudian $SS\left(\underline{\beta}^*\right)$ diturunkan terhadap $\underline{\beta}^*$ dan disamakan dengan nol, maka diperoleh:

$$\frac{\partial SS\left(\underline{\beta}^*\right)}{\partial \underline{\beta}^*} = 0 - 2\underline{X}^{*'}\underline{Y} + 2\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\underline{\beta}^* = 0$$
$$= -2\underline{X}^{*'}\underline{Y} + 2\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\underline{\beta}^* \quad = 0$$
$$= -\underline{X}^{*'}\underline{Y} + \underline{X}^{*'}\underline{X}^*\underline{\beta}^* \quad = 0 \quad (3.13)$$

Melalui penyederhanaan, persamaan (3.13) akan menjadi persamaan normal kuadrat terkecil, yaitu:

$$\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\underline{\beta}^* = \underline{X}^{*'}\underline{Y} \quad (3.14)$$

Oleh karena $\underline{X}^{*'}\underline{X}^*$ non-singular maka $\underline{X}^{*'}\underline{X}^*$ memiliki invers. Oleh karena itu, persamaan normal (3.14), dikalikan dengan $\left(\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\right)^{-1}$ dikedua sisi persamaan tersebut. Sehingga diperoleh estimasi kuadrat terkecil untuk $\underline{\hat{\beta}}^*$ dari solusi persamaan normal untuk prosedur *Sum-to-Zero* yaitu:

$$\underline{\hat{\beta}}^* = \left(\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\right)^{-1}\underline{X}^{*'}\underline{Y} \quad (3.15)$$

Hubungan untuk parameter model pengaruh $\mu_{ij}$, parameter $\mu^*, \tau_i^*, \beta_i^*$, dan $\gamma_{ij}^*$ dapat dipilih untuk memenuhi prosedur *Sum-to-Zero* dengan definisi sebagai berikut:

$$\mu^* = \bar{\mu}_{..},$$
$$\tau_i^* = \bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{..},$$
$$\beta_j^* = \bar{\mu}_{.j} - \bar{\mu}_{..}, \text{ dan}$$
$$\gamma_{ij}^* = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i.} - \bar{\mu}_{.j} + \bar{\mu}_{..} \quad (3.16)$$

- **Prosedur *Set-to-Zero***

Agar $\underline{X}'\underline{X}$ invertibel, dilakukan dengan cara mengurangi sebanyak kolom yang terpaut linier, selain dengan menggunakan prosedur *Sum-to-Zero* ada teknik lainnya yang sering digunakan yaitu prosedur *Set-to-Zero* dengan $r\left(\underline{X}'\underline{X}\right) = t + b + 2$. Model pengaruh dua arah pada prosedur *Set-to-Zero* adalah sebagai berikut:

$$\tau_t = 0 \quad (3.17)$$
$$\beta_j = 0 \quad (3.18)$$
$$\gamma_{it} = 0\,;\, i = 1,2,\cdots,t \quad (3.19)$$
$$\gamma_{bj} = 0\,;\, j = 1,2,\cdots,b \quad (3.20)$$

Hasil model ini diperoleh dengan menggabungkan pembatasan dalam model pengaruh dua arah dengan gambaran bahwa $\underline{Y} = \underline{X}^+\underline{\beta}^+ + \underline{\varepsilon}$. Matriks $\underline{X}^+$ didapatkan dari matriks rancangan penuh dari model pengaruh dua arah.

Solusi persamaan normal prosedur *Set-to-Zero* adalah:

$$\underline{\hat{\beta}}^+ = \left(\underline{X}^{+'}\underline{X}^+\right)^{-1}\underline{X}^{+'}\underline{Y} \quad (3.21)$$

Hubungan prosedur *Set-to-Zero* untuk parameter model pengaruh $\mu_{ij}$, parameter $\mu^+, \tau_i^+, \beta_i^+$, dan $\gamma_{ij}^+$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mu^{+} &= \mu_{tb}, \\ \tau_i^{+} &= \mu_{ib} - \mu_{tb}, \\ \beta_j^{+} &= \mu_{tj} - \mu_{tb}, \text{ dan} \\ \gamma_{ij}^{+} &= \mu_{ij} - \mu_{tj} - \mu_{ib} + \mu_{tb} \end{aligned} \tag{3.22}$$

## TELADAN PENERAPAN DAN PEMBAHASAN

### a. Teladan Penerapan

Untuk lebih memahami materi mengenai prosedur *Sum-to-Zero* dan *Set-to-Zero* dalam menentukan penduga parameter diberikan teladan penerapan yang diperoleh dari buku berjudul “Analysis Of Messy Data Volume 1 Designed Experiments” karangan Milliken and Johnson (2009: 180) berupa analisis data yang tidak seimbang dengan struktur perlakuan dua arah. Adapun data tersebut yaitu :

Tabel 2 Analisis Data yang Tidak Seimbang

| Row Treatment | Column Treatment | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 15<br>13 | 22<br>19 | 18<br>20 |
| 2 | 19 | 24<br>26 | |
| 3 | 21<br>22 | 27 | 23<br>23 |

### b. Pembahasan

**Model Rata-Rata**

$$Y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

dari data pada teladan pesamaan model rata-rata dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 13 \\ 22 \\ 19 \\ 18 \\ 20 \\ 19 \\ 24 \\ 26 \\ 21 \\ 22 \\ 27 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \mu_{13} \\ \mu_{21} \\ \mu_{22} \\ \mu_{31} \\ \mu_{32} \\ \mu_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{133} \\ \varepsilon_{133} \end{bmatrix}$$

diperoleh penduga $\underline{\hat{\beta}}$ untuk model rata-rata sebagai berikut:

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\underline{X}'\,\underline{X}\right)^{-1}\left(\underline{X}'\,\underline{Y}\right) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_{11} \\ \hat{\mu}_{12} \\ \hat{\mu}_{13} \\ \hat{\mu}_{21} \\ \hat{\mu}_{22} \\ \hat{\mu}_{31} \\ \hat{\mu}_{32} \\ \hat{\mu}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 20{,}5 \\ 19 \\ 19 \\ 25 \\ 21{,}5 \\ 27 \\ 23 \end{bmatrix}$$

**Model Pengaruh**

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

dari data pada teladan pesamaan model rata-rata dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 13 \\ 22 \\ 19 \\ 18 \\ 20 \\ 19 \\ 24 \\ 26 \\ 21 \\ 22 \\ 27 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \gamma_{11} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{21} \\ \gamma_{22} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{32} \\ \gamma_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{133} \\ \varepsilon_{133} \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa kolom atau baris pertama matriks $\underline{X}$ merupakan kombinasi linier dari tiga kolom atau baris berikutnya $(2, 3, \text{dan } 4)$ atau tiga kolom atau baris berikutnya $(5, 6, \text{dan } 7)$ atau 8 kolom atau baris berikutnya, maka $r(\underline{X}) < 14$. Dengan demikian determinan $(\underline{X}'\underline{X}) = 0$.

Dari hasil di atas diketahui bahwa matrikis tersebut singular dan tidak invertibel. Agar $\underline{X}'\underline{X}$ invertibel, dilakukan dengan cara mengurangi sebanyak kolom yang terpaut linier, diantaranya dilakukan dengan menggunakan prosedur *Sum-to-Zero* atau prosedur *Set-to-Zero*.

➢ **Prosedur *Sum-to-Zero***

**Prosedur *Sum-to-Zero* $(A_1)$**

Agar estimasi vektor parameter $\underline{\beta}$ dapat dihitung, perlu dilakukan reparameterisasi dengan memberikan batasan:

$$\sum_{i=1}^{3} \tau_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{3} \beta_j = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} = 0$$

Maka matriks $\underline{X}$ yang berukuran 15 kolom berkurang menjadi matriks $\underline{X}^*$ berukuran 8 kolom, sehingga:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 13 \\ 22 \\ 19 \\ 18 \\ 20 \\ 19 \\ 24 \\ 26 \\ 21 \\ 22 \\ 27 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \tau_2^* \\ \tau_3^* \\ \beta_2^* \\ \beta_3^* \\ \gamma_{22}^* \\ \gamma_{32}^* \\ \gamma_{33}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{133} \\ \varepsilon_{133} \end{bmatrix}$$

$r(\underline{X}^*) = 8$ karena kolom-kolom matriks $\underline{X}^*$ saling bebas linier. Nilai penduga $\hat{\underline{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\hat{\underline{\beta}}^* = \left(\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\right)^{-1}\left(\underline{X}^{*'}\underline{Y}\right) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}^* \\ \hat{\tau}_2^* \\ \hat{\tau}_3^* \\ \hat{\beta}_2^* \\ \hat{\beta}_3^* \\ \hat{\gamma}_{22}^* \\ \hat{\gamma}_{32}^* \\ \hat{\gamma}_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22{,}2864 \\ -0{,}8388 \\ 3{,}9117 \\ 5{,}0562 \\ -1{,}8319 \\ -2{,}2308 \\ 3{,}0463 \\ -1{,}8405 \end{bmatrix}$$

diperoleh penduga untuk elemen tetap dari $\underline{\beta}$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\tau}_1^* = -\hat{\tau}_2^* - \hat{\tau}_3^* = -(-0{,}8388) - (3{,}9117) = -3{,}0789$$
$$\hat{\beta}_1^* = -\hat{\beta}_2^* - \hat{\beta}_3^* = -(5{,}0562) - (-1{,}8319) = -3{,}2243$$
$$\hat{\gamma}_{21}^* = -\hat{\gamma}_{22}^* = -(-2{,}2308) = 2{,}2308$$
$$\hat{\gamma}_{31}^* = -\hat{\gamma}_{32}^* - \hat{\gamma}_{33}^* = -(3{,}0463) - (-1{,}8405) = -1{,}2058$$
$$\hat{\gamma}_{12}^* = -\hat{\gamma}_{22}^* - \hat{\gamma}_{32}^* = -(-2{,}2308) - (3{,}0463) = -0{,}8155$$
$$\hat{\gamma}_{13}^* = -\hat{\gamma}_{33}^* = -(-1{,}8405) = 1{,}8405$$
$$\hat{\gamma}_{11}^* = \hat{\gamma}_{22}^* + \hat{\gamma}_{32}^* + \hat{\gamma}_{33}^* = (-2{,}2308) + (3{,}0463) + (-1{,}8405) = -1{,}025$$

### Prosedur *Sum-to-Zero* ($A_2$)

Agar estimasi vektor parameter $\underline{\beta}$ dapat dihitung, perlu dilakukan reparameterisasi dengan memberikan batasan:

$$\sum_{i=1}^{3} \tau_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{3} \beta_j = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} = 0$$

Maka matriks $\underline{X}$ yang berukuran 15 kolom berkurang menjadi matriks $\underline{X}^*$ berukuran 9 kolom, sehingga:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 13 \\ 22 \\ 19 \\ 18 \\ 20 \\ 19 \\ 24 \\ 26 \\ 21 \\ 22 \\ 27 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \tau_1^* \\ \tau_3^* \\ \beta_1^* \\ \beta_3^* \\ \gamma_{11}^* \\ \gamma_{13}^* \\ \gamma_{31}^* \\ \gamma_{33}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{133} \\ \varepsilon_{133} \end{bmatrix}$$

$r(\underline{X}^*) = 9$ karena kolom-kolom matriks $\underline{X}^*$ saling bebas linier. Nilai penduga $\hat{\underline{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\hat{\underline{\beta}}^* = \left(\underline{X}^{*'} \underline{X}^*\right)^{-1} \left(\underline{X}^{*'} \underline{Y}\right) \hat{=} \begin{bmatrix} \hat{\mu}^* \\ \hat{\tau}_1^* \\ \hat{\tau}_3^* \\ \hat{\beta}_1^* \\ \hat{\beta}_3^* \\ \hat{\gamma}_{11}^* \\ \hat{\gamma}_{13}^* \\ \hat{\gamma}_{31}^* \\ \hat{\gamma}_{33}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21{,}9574 \\ -2{,}7752 \\ 4{,}2132 \\ -2{,}9302 \\ -2{,}2326 \\ -1{,}5194 \\ 2{,}3992 \\ -1{,}3566 \\ -0{,}9380 \end{bmatrix}$$

diperoleh penduga untuk elemen tetap dari $\underline{\beta}$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\tau}_2^* = -\hat{\tau}_1^* - \hat{\tau}_3^* = -(-2{,}7752) - (4{,}2132) = -1{,}4380$$
$$\hat{\beta}_2^* = -\hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_3^* = -(-2{,}9302) - (-2{,}2326) = 5{,}1628$$
$$\hat{\gamma}_{12}^* = -\hat{\gamma}_{11}^* - \hat{\gamma}_{13}^* = -(-1{,}5194) - (2{,}3992) = -0{,}8798$$
$$\hat{\gamma}_{32}^* = -\hat{\gamma}_{31}^* - \hat{\gamma}_{33}^* = -(-1{,}3566) - (-0{,}9380) = 2{,}2946$$
$$\hat{\gamma}_{21}^* = -\hat{\gamma}_{11}^* - \hat{\gamma}_{31}^* = -(-1{,}5194) - (-1{,}3566) = 2{,}8760$$
$$\hat{\gamma}_{22}^* = \hat{\gamma}_{11}^* + \hat{\gamma}_{13}^* + \hat{\gamma}_{31}^* + \hat{\gamma}_{33}^*$$
$$= (-1{,}5194) + 2{,}3992 + (-1{,}3566) + (-0{,}9380) = -1{,}4148$$

### **Prosedur *Sum-to-Zero* ($A_3$)**

Agar estimasi vektor parameter $\underline{\beta}$ dapat dihitung, perlu dilakukan reparameterisasi dengan memberikan batasan:

$$\sum_{i=1}^{3} \tau_i = 0, \qquad \sum_{j=1}^{3} \beta_j = 0, \qquad \sum_{i=1}^{3} \gamma_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \gamma_{ij} = 0$$

Maka matriks $\underline{X}$ yang berukuran 15 kolom berkurang menjadi matriks $\underline{X}^*$ berukuran 9 kolom, sehingga:

$$\begin{bmatrix} 15 \\ 13 \\ 22 \\ 19 \\ 18 \\ 20 \\ 19 \\ 24 \\ 26 \\ 21 \\ 22 \\ 27 \\ 23 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^* \\ \tau_1^* \\ \tau_2^* \\ \beta_1^* \\ \beta_2^* \\ \gamma_{11}^* \\ \gamma_{12}^* \\ \gamma_{21}^* \\ \gamma_{22}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{111} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{112} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{113} \\ \varepsilon_{121} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{122} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{131} \\ \varepsilon_{132} \\ \varepsilon_{133} \\ \varepsilon_{133} \end{bmatrix}$$

$r(\underline{X}^*) = 9$ karena kolom-kolom matriks $\underline{X}^*$ saling bebas linier. Nilai penduga $\underline{\hat{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\underline{\hat{\beta}}^* = \left(\underline{X}^{*'}\underline{X}^*\right)^{-1}\left(\underline{X}^{*'}\underline{Y}\right) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}^* \\ \hat{\tau}_1^* \\ \hat{\tau}_2^* \\ \hat{\beta}_1^* \\ \hat{\beta}_2^* \\ \hat{\gamma}_{11}^* \\ \hat{\gamma}_{12}^* \\ \hat{\gamma}_{21}^* \\ \hat{\gamma}_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21{,}9574 \\ -2{,}7752 \\ -1{,}4380 \\ -2{,}9302 \\ 5{,}1628 \\ -1{,}5194 \\ -0{,}8798 \\ 2{,}8760 \\ -1{,}4147 \end{bmatrix}$$

diperoleh penduga untuk elemen tetap dari $\underline{\beta}$ adalah sebagai berikut:

$$\hat{\tau}_3^* = -\hat{\tau}_1^* - \hat{\tau}_2^* = -(-2{,}7752) - (-1{,}4380) = 4{,}2132$$
$$\hat{\beta}_3^* = -\hat{\beta}_1^* - \hat{\beta}_2^* = -(-2{,}9302) - (5{,}1628) = -2{,}2326$$
$$\hat{\gamma}_{13}^* = -\hat{\gamma}_{11}^* - \hat{\gamma}_{12}^* = -(-1{,}5194) - (-0{,}8798) = 2{,}3992$$
$$\hat{\gamma}_{31}^* = -\hat{\gamma}_{11}^* - \hat{\gamma}_{21}^* = -(-1{,}5194) - (2{,}8760) = -1{,}3566$$
$$\hat{\gamma}_{32}^* = -\hat{\gamma}_{12}^* - \hat{\gamma}_{22}^* = -(-0{,}8798) - (-1{,}4147) = 2{,}2945$$
$$\hat{\gamma}_{33}^* = \hat{\gamma}_{11}^* + \hat{\gamma}_{12}^* + \hat{\gamma}_{21}^* + \hat{\gamma}_{22}^*$$
$$= (-1{,}5194) + (-0{,}8798) + 2{,}8760 + (-1{,}4147) = -0{,}6702$$

- **Prosedur *Set-to-Zero***

**Prosedur *Set-to-Zero* $(A_1)$**

Agar estimasi vektor parameter $\underline{\beta}$ dapat dihitung, perlu dilakukan reparameterisasi dengan memberikan batasan:

$$\tau_i = 0, \qquad \beta_j = 0, \qquad \gamma_{it} = \gamma_{bj} = 0$$

Sehingga matriks $\underline{X}$ yang berukuran 15 kolom berkurang menjadi matriks $\underline{X}^+$ berukuran 8 kolom:

$$\begin{bmatrix}15\\13\\22\\19\\18\\20\\19\\24\\26\\21\\22\\27\\23\\23\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&1&0&0\\1&1&0&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1&0&0&1\\1&0&1&0&1&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu^+\\\tau_2^+\\\tau_3^+\\\beta_2^+\\\beta_3^+\\\gamma_{22}^+\\\gamma_{32}^+\\\gamma_{33}^+\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{111}\\\varepsilon_{111}\\\varepsilon_{112}\\\varepsilon_{112}\\\varepsilon_{113}\\\varepsilon_{113}\\\varepsilon_{121}\\\varepsilon_{122}\\\varepsilon_{122}\\\varepsilon_{131}\\\varepsilon_{131}\\\varepsilon_{132}\\\varepsilon_{133}\\\varepsilon_{133}\end{bmatrix}$$

$r(\underline{X}^+) = 8$ karena kolom-kolom matriks $\underline{X}^+$ saling bebas linier. Nilai penduga $\underline{\hat{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\underline{\hat{\beta}} = \left(\underline{X}^{+'}\underline{X}^{+}\right)^{-1}\left(\underline{X}^{+'}\underline{Y}\right)=\begin{bmatrix}\hat{\mu}^+\\\hat{\tau}_2^+\\\hat{\tau}_3^+\\\hat{\beta}_2^+\\\hat{\beta}_3^+\\\hat{\gamma}_{22}^+\\\hat{\gamma}_{32}^+\\\hat{\gamma}_{33}^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16{,}4118\\2{,}5882\\4{,}3529\\5{,}5882\\1{,}4706\\0{,}4118\\6{,}2353\\0{,}7647\end{bmatrix}$$

diperoleh penduga untuk elemen tetap dari $\underline{\beta}$ pada prosedur *Set-to-Zero* adalah sebagai berikut:

$\hat{\tau}_1^+ = 0$ $\qquad$ $\hat{\beta}_1^+ = 0$

$\hat{\gamma}_{21}^+ = 0$ $\qquad$ $\hat{\gamma}_{31}^+ = 0$

$\hat{\gamma}_{12}^+ = 0$ $\qquad$ $\hat{\gamma}_{13}^+ = 0$

$\hat{\gamma}_{11}^+ = 0$

**Prosedur *Set-to-Zero* $(A_2)$**

Agar estimasi vektor parameter $\underline{\beta}$ dapat dihitung, perlu dilakukan reparameterisasi dengan memberikan batasan:

$$\tau_i = 0 \qquad\qquad \beta_j = 0 \qquad\qquad \gamma_{it} = \gamma_{bj} = 0$$

Sehingga matriks $\underline{X}$ yang berukuran 15 kolom berkurang menjadi matriks $\underline{X}^+$ berukuran 9 kolom:

$$\begin{bmatrix} 15\\13\\22\\19\\18\\20\\19\\24\\26\\21\\22\\27\\23\\23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&1&0&1&0&0&0\\ 1&1&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&0&1&0&0\\ 1&1&0&1&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&1\\ 1&0&1&0&1&0&0&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu^+\\ \tau_1^+\\ \tau_3^+\\ \beta_1^+\\ \beta_3^+\\ \gamma_{11}^+\\ \gamma_{13}^+\\ \gamma_{31}^+\\ \gamma_{33}^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{111}\\ \varepsilon_{111}\\ \varepsilon_{112}\\ \varepsilon_{112}\\ \varepsilon_{113}\\ \varepsilon_{113}\\ \varepsilon_{121}\\ \varepsilon_{122}\\ \varepsilon_{122}\\ \varepsilon_{131}\\ \varepsilon_{131}\\ \varepsilon_{132}\\ \varepsilon_{133}\\ \varepsilon_{133} \end{bmatrix}$$

$r(\underline{X}^+) = 9$ karena kolom-kolom matriks $\underline{X}^+$ saling bebas linier. Nilai penduga $\hat{\underline{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\hat{\underline{\beta}} = \left(\underline{X}^{+'}\underline{X}^{+}\right)^{-1}\left(\underline{X}^{+'}\underline{Y}\right) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}^+\\ \hat{\tau}_1^+\\ \hat{\tau}_3^+\\ \hat{\beta}_1^+\\ \hat{\beta}_3^+\\ \hat{\gamma}_{11}^+\\ \hat{\gamma}_{13}^+\\ \hat{\gamma}_{31}^+\\ \hat{\gamma}_{33}^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24{,}5000\\ -1{,}5000\\ 7{,}0000\\ -4{,}5000\\ -5{,}0000\\ -4{,}5000\\ 0{,}7500\\ -5{,}2500\\ -3{,}5000 \end{bmatrix}$$

diperoleh penduga untuk elemen tetap dari $\underline{\beta}$ pada prosedur *Set-to-Zero* adalah sebagai berikut:

$$\hat{\tau}_2^+ = 0 \qquad\qquad \hat{\beta}_2^+ = 0 \qquad\qquad \hat{\gamma}_{12}^+ = 0$$
$$\hat{\gamma}_{32}^+ = 0 \qquad\qquad \hat{\gamma}_{21}^+ = 0 \qquad\qquad \hat{\gamma}_{22}^+ = 0$$

**Prosedur *Set-to-Zero* $(A_3)$**

Agar estimasi vektor parameter $\underline{\beta}$ dapat dihitung, perlu dilakukan reparameterisasi dengan memberikan batasan:

$$\tau_i = 0 \qquad\qquad \beta_j = 0 \qquad\qquad \gamma_{it} = \gamma_{bj} = 0$$

Sehingga matriks $\underline{X}$ yang berukuran 15 kolom berkurang menjadi matriks $\underline{X}^+$ berukuran 9 kolom:

$$\begin{bmatrix}15\\13\\22\\19\\18\\20\\19\\24\\26\\21\\22\\27\\23\\23\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0&1&0&1&0&0&0\\1&1&0&1&0&1&0&0&0\\1&1&0&0&1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&1&0&0\\1&1&0&0&0&0&0&0&0\\1&1&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&1&0\\1&0&1&0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mu^+\\\tau_1^+\\\tau_2^+\\\beta_1^+\\\beta_2^+\\\gamma_{11}^+\\\gamma_{12}^+\\\gamma_{21}^+\\\gamma_{22}^+\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{111}\\\varepsilon_{111}\\\varepsilon_{112}\\\varepsilon_{112}\\\varepsilon_{113}\\\varepsilon_{113}\\\varepsilon_{121}\\\varepsilon_{122}\\\varepsilon_{122}\\\varepsilon_{131}\\\varepsilon_{131}\\\varepsilon_{132}\\\varepsilon_{133}\\\varepsilon_{133}\end{bmatrix}$$

$r(\underline{X}^+) = 9$ karena kolom-kolom matriks $\underline{X}^+$ saling bebas linier. Nilai penduga $\hat{\underline{\beta}}$ sebagai berikut:

$$\hat{\underline{\beta}}=\left(\underline{X}^{+'}\underline{X}^+\right)^{-1}\left(\underline{X}^{+'}\underline{Y}\right)=\begin{bmatrix}\hat{\mu}^+\\\hat{\tau}_1^+\\\hat{\tau}_2^+\\\hat{\beta}_1^+\\\hat{\beta}_2^+\\\hat{\gamma}_{11}^+\\\hat{\gamma}_{12}^+\\\hat{\gamma}_{21}^+\\\hat{\gamma}_{22}^+\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15{,}7479\\-2{,}1017\\32{,}0000\\-1{,}1590\\4{,}6619\\-7{,}2692\\-3{,}2116\\-32{,}0000\\-64{,}0000\end{bmatrix}$$

diperoleh penduga untuk elemen tetap dari $\underline{\beta}$ pada prosedur *Set-to-Zero* adalah sebagai berikut:

$\hat{\tau}_3^+ = 0$ $\quad\hat{\beta}_3^+ = 0$ $\quad\hat{\gamma}_{13}^+ = 0$

$\hat{\gamma}_{31}^+ = 0$ $\quad\hat{\gamma}_{32}^+ = 0$ $\quad\hat{\gamma}_{33}^+ = 0$

- **Analisis Varian (ANAVA)**

Tabel 3 Analisis Varian

| Sumber Varian | Derajat Bebas $(db)$ | Jumlah Kuadrat $(JK)$ | Kuadrat Tengah $(KT)$ | $F_{\text{hitung}}$ | $F_{\text{Tabel}}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Baris | 2 | 96,0810 | 48,0405 | 21,8366 | 5,79 |
| Kolom | 2 | 78,5143 | 39,2571 | 17,8441 | 5,79 |
| Interaksi | 4 | 12,1190 | 3,02975 | 1,3772 | 5,19 |
| Galat | 5 | 11,0000 | 2,2 | | |
| Total | 13 | 197,7143 | | | |

## KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan mengenai prosedur *Sum-to-Zero* dan *Set-to-Zero* serta penerapannya maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Cara menganalisis data yang tidak seimbang dengan kajian prosedur *Sum-to-Zero* dan *Set-to-Zero* yaitu:
   - Menentukan model struktur perlakuan dua arah yang meliputi model rata-rata dan model pengaruh.
   - Agar bentuk matriks invertibel dilakukan dengan cara mengurangi sebanyak kolom yang terpaut linier dengan menggunakan prosedur *Sum-to-Zero* yaitu suatu teknik yang menggunakan asumsi bahwa jumlah pengaruh parameter sama dengan nol. Selain itu teknik lain yang sering digunakan adalah prosedur *Set-to-Zero*.
2. Cara menentukan penduga parameter yaitu dengan estimasi kuadrat terkecil.

## DAFTAR PUSTAKA


[1]. Anonim. 2010. *Jenis-jenis Rancangan Percobaan*. http://exponensial.wordpress.com/2010/02/27/jenis-jenis-rancangan-percobaan/

[2]. Anton, H. 2004. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Erlangga. Jakarta

[3]. Graybill, F.A. 1976. *Theory and Application of Linear Model*. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Sofware. Pasific Grove

[4]. Hanafiah, K. 2003. *Rancangan Percobaan Teori dan Aplikasi*. Grafindo Persada. Jakarta

[5]. Herawati, N. 2010. *Rancangan Percobaan*. http://lemlit.unila.ac.id/file/data%20lama/makalah%20pdf/BAHANMETODOL.DOSEN.pdf

[6]. Lentner, M. and T. Bishop. 1986. *Experimental Design and Analysis*. Valey Book Company. Blacksburg

[7]. Miliken, G.A and D.E. Johnson. 2009. *Analysis Of Messy Data Volume 1 Designed Experiments*. CRC Press. New York

[8]. Montgomery, D.C. 1991. *Experimental Design.* John Wiley and Sons. New York

[9]. Nugroho, S. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan*. Unib Press. Bengkulu

[10]. Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Rekayasa Sains. Bandung

[11]. Steel, R.G.D. dan Torrie, J.H. 1995. *Prinsip dan Prosedur Statistika: Suatu Pendekatan Biometrik*. Gramedia. Jakarta