Prosedur *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) Pada Regresi Multivariat

Harjuno Sosro*, Sigit Nugroho, Etis Sunandi****
Jurusan Matematika, FMIPA
Universitas Bengkulu
*Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu
**Staf Pengajar Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Bengkulu

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk agar dapat memahami prosedur *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) pada Regresi Multivariat. Model linier yang digunakan pada penelitian ini adalah model regresi linier multivariat. Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan tentang statistika multivariat, analisis regresi, serta *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA). Metode penelitian yang digunakan yaitu studi literatur. Penelitian ini menjelaskan bagaimana membentuk tabel MANOVA pada regresi multivariat. Dalam mengestimasi parameter, metode yang digunakan yaitu metode kuadrat terkecil.Teladan penerapan yang dijelaskan yaitu sampel urin manusia. Terdapat tiga belas variabel yang diamati yaitu dua variabel prediktor dan sebelas variabel respon. Akan dilihat pengaruh 1) Volume(ml); 2) (specific gravity- 1) x10^3 terhadap 1) PH; 2) Koefisien modifikasi *creatinine*; 3) Pigmen *creatinine*; 4) *Phosphate*; 5) Kalsium; 6) *Phosphorus*; 7) *Creatinine*; 8) Chloride; 9) Boron; 10) Choline; 11) Copper. Dari hasil perhitungan dapat disimpulkan adanya pengaruh 1) Volume(ml); 2) (specific gravity- 1) x10^3 terhadap 1) PH; 2) Koefisien modifikasi *creatinine*; 3) Pigmen *creatinine*; 4) *Phosphate*; 5) Kalsium; 6) *Phosphorus*; 7) *Creatinine*; 8) Chloride; 9) Boron; 10) Choline; 11) Copper

Kata kunci: Regresi Multivariat, Metode Kuadrat Terkecil, MANOVA

PENDAHULUAN

Analisis regresi merupakan analisis statistik yang mempelajari hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor (Kurniawati, 2011). Tujuan dari analisis regresi adalah menentukan sebuah model, dengan model ini dapat diprediksi nilai dari variabel respon yang belum diketahui (Yan dan Su, 2009). Berdasarkan hubungan kelinieran antar parameter dalam persamaan regresi, analisis regresi dapat dibagi menjadi dua yaitu regresi linier dan regresi nonlinier. Berdasarkan jumlah variabel prediktor dan respon yang dilibatkan dalam analisis regresi, pada saat analisis regresi hanya terdiri dari satu variabel respon, regresi linier dapat dibagi menjadi regresi linier sederhana dan regresi linier berganda.

Regresi linier multivariat merupakan kelanjutan dari regresi linier berganda yang mana keduaanya sama-sama menafsirkan hubungan linier antara variabel prediktor dan variabel repon tertentu. Pada regresi multivariat tidak hanya variabel prediktor yang berkorelasi satu sama lain, komponen variabel respon juga berkorelasi (Izenman, 2008).

Regresi linier sederhana dan regresi linier berganda penarikan kesimpulannya dilakukan dengan menggunakan *Analysis of Variance* (ANOVA) sedangkan regresi multivariat penarikan kesimpulannya dilakukan dengan menggunakan *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA). *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) merupakan pengembangan dari *Analysis of Variance* (ANOVA) untuk situasi dimana ada beberapa variabel respon (Tabachnick dan Fidell, 2007). Pada penelitian ini penulis tertarik untuk memahami dan mengkaji prosedur *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) pada regresi multivariat.

REGRESI LINIER BERGANDA

1. Model Regresi Linier Berganda

Terdapat dua variabel dalam analisis regresi, yaitu variabel respon dan variabel prediktor. Regresi digunakan untuk menduga nilai-nilai satu variabel respon dari nilai variabel prediktor yang sudah diketahui atau diasumsikan ada hubungan dengannya. Apabila suatu regresi linier hanya menggunakan satu variabel prediktor maka regresi linier ini disebut regresi linier sederhana, sedangkan yang menggunakan lebih dari satu variabel prediktor disebut regresi linier berganda (Nugroho, 2008).

Adapun bentuk dari persamaan regresi menurut Johnson (2007) dalam matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1,k-1} & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2,k-1} & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n-1,1} & \cdots & X_{n-1,k-1} & X_{n-1,k} \\ 1 & X_{n1} & \cdots & & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{k-1} \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{n-1} \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Regresi linier berganda terdiri dari lebih dari satu variabel prediktor $X_1, X_2, \ldots, X_k$. Berdasarkan bentuk dari persamaan regresi diatas, maka model dari regresi linier berganda menurut Rawlings (1998) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

dengan Y_i adalah variabel respon pada pengamatan ke-i, β_0 adalah intersep, β_k adalah koefisien regresi pada variabel prediktor ke-k, X_{ik} adalah variabel prediktor ke-k pada pengamatan ke-i, dan ε_i adalah galat dari pengamatan ke-i.

2. Estimasi Parameter Regresi Linier Berganda

Pada regresi linier berganda estimasi parameter yang biasa digunakan adalah metode kuadrat terkecil yaitu meminumkan jumlah kuadrat galat. Adapun estimator kuadrat terkecil dari β adalah

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$
$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}, \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'X} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ik} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} {X_{ik}}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}X_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}X_{ik} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} {X_{ik}}^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'Y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{1k} & X_{2k} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1}Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik}Y_i \end{bmatrix}$$

3. Analysis of Variance (ANOVA) Pada Regresi Linier Berganda

Model regresi yang baik ditandai oleh tingginya koefisien determinasi yang mana nilai koefisien determinasi ini didapatkan dari ANOVA. Adapun ANOVA dalam regresi linier berganda meliputi jumlah kuadrat (JK), derajat bebas (db), dan kuadrat tengah (KT).

Tabel 1. *Analysis of Variance* (ANOVA) Pada Regresi Linier Berganda

Sumber Keragaman	JK	DB	KT	F^*
Model Regresi	$\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)\mathbf{Y}'\mathbf{JY}$	k	$\frac{JK[Model]}{k}$	$\frac{KT[Model]}{KT[Galat]}$
Galat	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}'\mathbf{Y}$	$n-(k+1)$	$\frac{JK[Galat]}{n-(k+1)}$	
Total	$\mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)\mathbf{Y}'\mathbf{JY}$	$n-1$		

4. Pengujian Hipotesis

Hubungan antara variabel respon dengan variabel prediktor dalam analisis regresi linier berganda dapat diuji dengan menggunakan Uji F. Menurut Kutner, dkk (2004) hipotesis-hipotesis Pada uji F dapat dituliskan:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$

$H_1: tidak\ semua\ \beta_j (j = 1, \dots, k) = 0$

Statistik uji yang digunakan dalam uji F adalah:

$$F^* = \frac{KT[Model]}{KT[Galat]}$$

Kriteria penolakannya adalah:

- Jika $F^* \leq F_{tabel}\big(1-\alpha; k; n-(k+1)\big)$, maka kesimpulannya H_0 diterima

- Jika $F^* > F_{tabel}\big(1-\alpha; k; n-(k+1)\big)$, maka kesimpulannya H_0 ditolak

Hipotesis nol menyatakan semua koefisien regresi sama dengan nol. Artinya apabila hipotesis ini terpenuhi tidak adanya pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon.

MULTIVARIATE ANALYSIS OF VARIANCE (MANOVA) PADA REGRESI MULTIVARIAT

1. Model Regresi Multivariat

Model regresi multivariat adalah suatu model regresi dengan lebih dari satu variable respon yang saling berkorelasi dan satu atau lebih variabel prediktor (Aminuddin dkk, 2013). Model ini merupakan pengembangan dari model regresi linier berganda. Menurut Johnson (2007) model regresi multivariat dalam bentuk matriks dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathbf{Y}_{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l})} = \mathbf{X}_{(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{k}+\mathbf{1}))}\boldsymbol{\beta}_{((\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\times\boldsymbol{l})} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l})}$$

$$\text{dengan } E\big(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}\big) = 0 \text{ dan } \mathrm{Cov}\big(\boldsymbol{\varepsilon}_{(i)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{(j)}\big) = \sigma_{ij}\mathbf{I}$$

dimana:

$$\mathbf{Y}_{(n\times l)} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1l} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nl} \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_{(1)} \ \vdots \ \mathbf{Y}_{(2)} \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ \mathbf{Y}_{(l)}]$$

$$\mathbf{X}_{(n\times(k+1))} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1,k-1} & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2,k-1} & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n-1,1} & \cdots & X_{n-1,k-1} & X_{n-1,k} \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{n,k-1} & X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}_{(n\times(k+1))} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1,k-1} & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2,k-1} & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{n-1,1} & \cdots & X_{n-1,k-1} & X_{n-1,k} \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{n,k-1} & X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{(n\times l)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1l} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{nl} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{\varepsilon}_{(1)} \ \vdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_{(2)} \ \vdots \ \cdots \ \vdots \ \boldsymbol{\varepsilon}_{(l)}]$$

Pada model di atas, *k* merupakan banyaknya variabel prediktor yang dilibatkan dalam model, *l* merupakan banyaknya variabel respon yang dilibatkan dalam model, dan *n* merupakan banyaknya pengamatan. Matriks $\mathbf{Y}_{(n\times l)}$ merupakan matriks dari variabel respon dimana variabel respon yang dilibatkan dalam model adalah sebanyak *l* dan diamati sebanyak *n*. Matriks $\mathbf{X}_{(n\times(k+1))}$ merupakan matriks dari variabel prediktor dimana variabel prediktor yang dilibatkan di dalam model adalah sebanyak *k* dan diamati sebanyak *n*. Parameter $\boldsymbol{\beta}_{((\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\times\boldsymbol{l})}$ merupakan matriks dari parameter-parameter regresi dimana matriks ini jumlah barisnya sebanyak $(k+1)$ dan jumlah kolomnya sebanyak *l*. $\boldsymbol{\varepsilon}_{(n\times l)}$ merupakan matriks dari galat, dimana matriks dari galat ini jumlah barisnya sebanyak *n* dan jumlah kolomnya sebanyak *l*.

2. Asumsi Model Regresi Multivariat

Untuk menyelesaikan masalah dengan menggunakan model regresi multivariat harus diketahui terlebih dahulu apa saja hal-hal yang harus dipenuhi supaya model ini dapat digunakan. Hal-hal inilah yang disebut dengan asumsi, dengan kata lain apabila salah satu dari asumsi tidak terpenuhi maka model regresi multivariat tidak dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang sedang diteliti. Menurut Aminuddin (2013) asumsi-asumsi model regresi multivariat adalah sebagai berikut:

1. Galatnya bersifat independen
2. Galatnya berdistribusi normal multivariat
3. Galatnya memiliki matriks varian kovarian yang homogen

3. Estimasi Parameter Regresi Multivariat

Sama halnya pada regresi linier berganda, pada regresi multivariat estimator kuadrat terkecil $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$**,** namun pada regresi multivariat karena matriks $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ dan matriks $\mathbf{Y}$ terdiri dari banyak kolom maka menurut Rencher (2002) estimator kuadrat terkecil $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ pada regresi multivariat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\left(\boldsymbol{y}_{(1)} \vdots\ \boldsymbol{y}_{(2)} \vdots \ \ldots \vdots\ \boldsymbol{y}_{(l)}\right)\\ &= \left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}_{(1)} \vdots (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}_{(2)} \vdots \cdots \vdots (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{y}_{(l)}\right]\\ &= \left[\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(1)} \vdots \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(2)} \vdots \cdots \vdots \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(l)}\right]\end{aligned}$$

dimana:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}_{01} & \hat{\beta}_{02} & \cdots & \hat{\beta}_{0l}\\ \hat{\beta}_{11} & \hat{\beta}_{12} & \cdots & \hat{\beta}_{1l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \hat{\beta}_{k1} & \hat{\beta}_{k2} & \cdots & \hat{\beta}_{kl}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}\\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1} & \sum_{i=1}^{n} {X_{ik}}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}X_{ik}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}X_{ik} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} {X_{ik}}^2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{n1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{1k} & X_{2k} & \cdots & X_{nk}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1l}\\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2l}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nl}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_{i1} & \sum_{i=1}^{n} Y_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} Y_{il} \\ \sum_{i=1}^{n} X_{i1}Y_{i1} & \sum_{i=1}^{n} X_{i1}Y_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{il}Y_{il} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ik}Y_{ik} & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}Y_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} X_{ik}Y_{il} \end{bmatrix}$$

4. *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA)

Pada dasarnya analisis ragam peubah ganda (*Multivariate Analysis of Variance* atau *MANOVA*) merupakan pengembangan lebih lanjut dari *Analysis of Variance* (*ANOVA*), keduanya memiliki tujuan yang sama yaitu untuk menganalisis data dan menarik kesimpulan.

Tabel 2. *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) pada Regresi Multivariat

Sumber Keragaman	Matriks JK	Db
Model Regresi	$\mathbf{H} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$	k
Galat	$\mathbf{E} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$	$n-k-1$
Total	$\mathbf{E_H} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y}$	$n-1$

5. Pengujian Hipotesis

Untuk menguji apakah secara keseluruhan parameter-parameter regresi tidak sama dengan nol, dapat dilakukan pengujian sebagai berikut:

Hipotesis:

H_0: $\boldsymbol{\beta_{11}} = \boldsymbol{\beta_{12}} = \cdots = \boldsymbol{\beta_{k1}} = \cdots = \boldsymbol{\beta_{kl}} = \mathbf{0}$

H_1: Paling sedikit ada satu $\boldsymbol{\beta_{kl}} \neq \mathbf{0}$

Statistik Uji yang digunakan adalah Wilk's Lambda:

$$\Lambda = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E}+\mathbf{H}|}$$

H_0 ditolak jika $\Lambda_{hitung} \leq \Lambda_{\alpha,l,n-k-1}$ adalah nilai tabel kritis untuk Wilk's lambda.

Statistik wilk's lambda dapat ditansformasi menuju statistik F yang berdistribusi F Fisher. Sehingga dalam pengujian akan menggunakan uji F. adapun aturannya adalah sebagai berikut:

Tabel 3. Transformasi Wilk's Lambda ke distribusi F

Parameter		F_{Hitung}	$Db\ F$
l	DB Model		
1	≥1	$\left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right)\left(\frac{DB[G]}{DB[M]}\right)$	$Db[M], Db[G]$

2	≥1	$\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right)\left(\frac{DB[G]-1}{DB[M]}\right)$	$2(Db[M]),2((Db[G])-1)$
≥1	1	$\left(\frac{1-\Lambda}{\Lambda}\right)\left(\frac{DB[G]+DB[M]-l}{l}\right)$	$l, Db[G]+Db[M]-l$
≥1	2	$\left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right)\left(\frac{DB[G]+DB[M]-l-}{l}\right.$	$2l, 2(Db[G]+Db[M]-\ l-1)$

dengan:
l = Banyaknya variabel respon yang diamati
$Db[M]$ = Derajat bebas model regresi
$Db[G]$ = Derajat bebas galat

Setelah melakukan transformasi pengujian akan dilakukan dengan menggunakan uji F, dengan kriteria penolakan tolak H_0 jika $F_{Hitung} > F_{Tabel}$

TELADAN PENERAPAN

Teladan penerapan *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) pada regresi multivariat diambil dari teladan pada buku *"Multivariate Observations"* oleh Seber (1984). Data tersebut merupakan data sampel urin pada manusia. Dimana hal-hal yang diamati ada tiga belas variabel. Tiga belas variabel tersebut terdiri dari sebelas variabel respon dan dua variabel prediktor.

1. Mode Linier

Model regresi multivariat dapat dituliskan:
$\mathbf{Y}_{(\mathbf{45}\times\mathbf{11})} = \mathbf{X}_{(\mathbf{45}\times(\mathbf{2}+\mathbf{1}))}\boldsymbol{\beta}_{((\mathbf{2}+\mathbf{1})\times\mathbf{11})} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(\mathbf{45}\times\mathbf{11})}$

2. Estimasi Parameter

Menurut Rencher (2002) estimator kuadrat terkecil $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ pada regresi multivariat dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-\mathbf{1}}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

Jika ditulis dalam bentuk $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ matriksnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 5{,}7876 & 4{,}8178 & 12{,}6788 & 1{,}8931 & -0{,}0545 & 2{,}2068 & 1{,}8464 & -2{,}1392 & 6{,}0826 & 0{,}5366 & 0{,}2616 \\ 0{,}0001 & -0{,}0066 & 0{,}0172 & -0{,}0046 & 0{,}0001 & -0{,}0033 & -0{,}0039 & 0{,}0043 & -0{,}0071 & -0{,}0069 & -0{,}0002 \\ -0{,}0119 & 0{,}0017 & -0{,}0508 & 0{,}0509 & 0{,}0081 & 0{,}0182 & 0{,}0583 & 0{,}2423 & -0{,}0436 & 0{,}3382 & -0{,}0018 \end{bmatrix}$$

3. *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA)

Pertama yang perlu ditemukan adalah nilai matriks jumlah kuadrat model regresi (**H**). Adapun matriks jumlah kuadrat model regresi yaitu:

$\mathbf{H} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$

Untuk mencari nilai matriks jumlah kuadrat galat yaitu:
$\mathbf{E} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$

dengan

$derajat\ bebas\ model\ regresi = 2$
$derajat\ bebas\ galat = 45 - 2 - 1 = 42$
$derajat\ bebas\ total = 45 - 1 = 44$

Tabel 4. *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) pada sample urin manusia

Sumber Keragaman	Matriks JK	Db
Model Regresi	$\begin{bmatrix} 1360{,}389 & 774{,}0005 & \cdots & 39{,}52077 \\ 774{,}0005 & 464{,}6107 & \cdots & 23{,}05335 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 39{,}52077 & 23{,}05535 & \cdots & 1{,}164657 \end{bmatrix}$	2
Galat	$\begin{bmatrix} 3{,}6506 & 3{,}9334 & \cdots & -0{,}132 \\ 3{,}9334 & 26{,}99 & \cdots & -0{,}135 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0{,}132 & -0{,}135 & \cdots & 0{,}0982 \end{bmatrix}$	42
Total	$\begin{bmatrix} 1364{,}04 & 777{,}394 & \cdots & 39{,}3890 \\ 777{,}934 & 491{,}601 & \cdots & 22{,}9205 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 39{,}3890 & 22{,}9205 & \cdots & 1{,}26290 \end{bmatrix}$	44

4. Pengujian Hipotesis

Pengujian ini bertujuan untuk melihat apakah secara keseluruhan parameter-parameter regresi tidak sama dengan 0 artinya adanya pengaruh variabel prediktor terhadap variabel respon. Pengujiannya adalah sebagai berikut:

- Hipotesis:
  H_0: $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{11}} = \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{12}} = \cdots = \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{21}} = \cdots = \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{2,11}} = \mathbf{0}$
  H_1: Paling sedikit ada satu $\boldsymbol{\beta}_{\mathbf{kl}} \neq \mathbf{0}$
- Besaran yang diperlukan:
  $\alpha = 0{,}05$
- Statistik Uji:
  $$\Lambda = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E} + \mathbf{H}|}$$
  dimana:
  $$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 3{,}6506 & 3{,}9334 & \cdots & -0{,}132 \\ 3{,}9334 & 26{,}99 & \cdots & -0{,}135 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0{,}132 & -0{,}135 & \cdots & 0{,}0982 \end{bmatrix}$$
  $|\mathbf{E}| = 544873768988{,}481$
  $$\mathbf{E} + \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1364{,}04 & 777{,}394 & \cdots & 39{,}3890 \\ 777{,}934 & 491{,}601 & \cdots & 22{,}9205 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 39{,}3890 & 22{,}9205 & \cdots & 1{,}26290 \end{bmatrix}$$

$|\mathbf{E}+\mathbf{H}| =$ 4825043144535070
sehingga
$$\Lambda = \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{E}+\mathbf{H}|} = \frac{544873768988{,}481}{4825043144535070} = 0{,}000112926$$
$\Lambda_{Hitung} = 0{,}000112926$

Setelah didapatkan nilai wilk's lambda, nilai tersebut bisa ditransformasi menuju sebaran F sehingga pengujiannya mengikuti uji F. Diketahui banyaknya variabel respon adalah sebelas serta derajat bebas modelnya 2, maka untuk mentransformasi menuju F mengikuti persamaan berikut:

$$F_{Hitung} = \left(\frac{1-\sqrt{\Lambda}}{\sqrt{\Lambda}}\right)\left(\frac{DB[G]+DB[M]-l-1}{l}\right)$$
$$F_{Hitung} = \left(\frac{1-\sqrt{0{,}000112926}}{\sqrt{0{,}000112926}}\right)\left(\frac{42+2-11-1}{11}\right) = 270{,}8446$$

dengan derajat bebas F_{tabel} $2l, 2(Db[G]+Db[M]-l-1)$

$$= 2(11), 2(42+2-11-1)$$
$$= 22; 64$$

artinya pada F_{tabel} $Db[M]$ = 22, $Db[G]$ = 64.

$F_{0,05;22;64} = 1{,}71084$

- Kriteria penolakan
  Tolak H_0 jika $F_{Hitung} > F_{Tabel}$
  Terima H_0 jika $F_{Hitung} \leq F_{Tabel}$

- Kesimpulan
  H_0 ditolak, karena $(F_{Hitung} = 270{,}8446) > (F_{Tabel} = 1{,}71084)$, artinya Paling sedikit ada satu $\beta_{kl} \neq 0$. Hal ini menunjukkan secara bersama-sama Volume dan specific gravity mempengaruhi variabel-variabel respon yaitu PH, Koefisien modifikasi *creatinine*, Pigmen *creatinine*, *Phosphate*, Kalsium, *Phosphorus*, *Creatinine*, Chloride, Boron, Choline, Copper.

KESIMPULAN

Model linier untuk regresi multivariat merupakan perluasan dari regresi linier berganda, yaitu:
$$\mathbf{Y}_{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l})} = \mathbf{X}_{(\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{k}+\mathbf{1}))}\boldsymbol{\beta}_{((\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\times\boldsymbol{l})} + \boldsymbol{\varepsilon}_{(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{l})}$$
Metode kuadrat terkecil merupakan salah satu metode untuk mengestimasi parameter regresi. Parameter perlu diestimasi untuk memperkirakan nilai-nilai parameter tersebut. Adapun estimator kuadrat terkecil pada regresi multivariat adalah:
$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\left(\boldsymbol{y}_{(\mathbf{1})} \vdots\ \boldsymbol{y}_{(\mathbf{2})} \vdots\ \dots \vdots\ \boldsymbol{y}_{(\boldsymbol{l})}\right)$$
Penggunaan tabel keragaman pada regresi multivariat bukan menggunakan ANOVA melainkan MANOVA. MANOVA merupakan pengembangan lebih lanjut dari ANOVA dalam kasus variabel respon yang diamati lebih dari satu. MANOVA pada regresi

multivariat memiliki matriks jumlah kuadrat model regresi $\mathbf{H} = \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, matriks jumlah kuadrat galat $\mathbf{E} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, serta matriks jumlah kuadrat total $\mathbf{E_H} = \mathbf{Y}'\mathbf{Y}$.

SARAN

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya menjelaskan prosedur *Multivariate Analysis of Variance* (MANOVA) pada regresi multivariat dengan teladan penerapan yang diambil dalam buku Seber (1984) "*Multivariate Observations"*. Untuk penelitian lebih lanjut, dapat dibahas mengenai prosedur pemilihan model terbaik pada regresi multivariat.

DAFTAR PUSTAKA

Aminuddin, Sudarno, dan Sugito. 2013. *Pemilihan Model Regresi Linier Multivariat Terbaik Dengan Kriteria Mean Square Error*. UNDIP.

Gujarati, D.N. 2007. *Dasar-dasar Ekonometrika*. Erlangga.

Izenman, A. J. 2008. *Modern Multivariate Statistical Techniques*. Springer. USA

Johnson R.A. and D.W. Wichern. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis 6th.* Pearson Education International. USA

Kurniawan A. 2009. *Belajar mudah SPSS untuk Pemula.* MediaKom. Yogyakarta

Kurniawati L.D. 2011. Kekekaran Regresi Linier Ganda Dengan Estimasi MM (Method of Moment) Dalam Mengatasi Pencilan. *Skripsi*. Universitas Negeri Yogyakarta. Yogyakarta.

Kutner, M.H, J.N. Christopher, N. John, and L. William. 2004. *Applied Linear Statistical Models.* Fifth Edition. McGraw-Hill/Irwin. New York

Mattjik, A.A dan I.M. Sumertajaya. 2011. *Sidik Peubah Ganda*. Intitut Pertanian Bogor. Bogor.

Rawlings, J.O, S.G. Pantula dan D.A. Dickey. 1998. *Applied Regression Analysis: A Research Tool 2nd*. Springer. USA.

Rencher, A.C. 1998. *Multivariate Statistical Inference and Applications*. Brigham Young University. Canada.

Rencher, A.C. 2002. *Method of Multivariate Analisys*. Brigham Young University. Canada.

Santoso, S. 2005. *Menggunakan SPSS untuk Statistik Parametrik*. Elex Media Komputindo. Jakarta.

Seber. G. A. F. 1984. *Multivariate Observations*. John Wiley and Sons. New Zealand.

Sigit Nugroho Ph.D. 2008. *Dasar-Dasar Metode Statistika*. Grasindo. Jakarta

Sigit Nugroho Ph.D. 2008. *Dasar-Dasar Rancangan Percobaan*. Unib Press

Tabachnick, B.G and L.S. Fidell. 2007. *Using Multivariate Statistics*. California State University. Northridge.

Widiharih, T 2011, 'Analisis Ragam Multivariat Untuk Rancangan Acak Lengkap Dengan Pengamatan Berulang', *Jurnal Matematika dan Komputer*, vol. 4. No. 3, hh 139-150.

Yan X. And X.G. Su. 2009. *Linear Regression Analysis Theory and Computing*. World Scientific. Singapore.