METODE *LATENT ROOT REGRESSION* (LRR) DALAM MENGATASI MASALAH MULTIKOLINIERITAS

Neni Agustini[1], Sigit Nugroho[2] dan Dian Agustina[3]

[1]Alumni Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Bengkulu
[2, 3]Staf Pengajar Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Bengkulu
e-mail: [1]neni.agustini@ymail.com, [2]sigit.nugroho.1960@gmail.com dan [3]dianagustina117@yahoo.com

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui dan memahami cara mendeteksi adanya multikolinieritas dan prosedur metode *Latent Root Regression* (LRR) dalam mengatasi masalah multikolinieritas. Agar lebih mudah memahami metode LRR, maka perlu teladan penerapan. Teladan penerapan diambil dari buku "*Applied Linear Statistical Models Fifth Edition*" oleh Kutner, *et al*. (2005: 256-257) tentang persentase lemak tubuh wanita berusia 25-34 tahun dengan variabel yang mempengaruhinya. Hasil analisis dalam penelitian ini diperoleh bahwa metode LRR menghasilkan nilai VIF (*Variance Inflation Factor*) yang tidak lagi melebihi 10 dan tidak ada korelasi antar variabel bebas. Selain itu nilai koefisien determinasi yang dihasilkan sebesar 100%. Sehingga dapat dikatakan bahwa metode LRR menunjukkan masalah multikolinieritas dapat diatasi secara tuntas.

Kata Kunci: Multikolinieritas, Korelasi, *Variance Inflation Factor* (VIF), *Latent Root Regression* (LRR)

1. PENDAHULUAN

Analisis regresi adalah salah satu metode atau teknik statistika yang dapat digunakan untuk menyelidiki hubungan atau pengaruh antara suatu variabel dengan variabel lainnya. Variabel-variabel regresi yang berhubungan secara linier disebut regresi linier. Regresi linier yang menghubungkan satu variabel respon dengan satu variabel bebas disebut dengan regresi linier sederhana, sedangkan regresi linier yang menghubungkan satu variabel respon dengan dua atau lebih variabel bebas disebut regresi linier berganda (Kutner, *et al*., 2004).

Salah satu asumsi yang harus dipenuhi dalam model regresi linier berganda adalah tidak terdapat multikolinieritas di antara variabel bebas yang termasuk dalam model. Multikolinieritas merupakan suatu kondisi dimana terjadi korelasi yang tinggi antar variabel-variabel bebas yang mengakibatkan determinan dari matriks $X'X$ akan mendekati 0 sehingga akan menyebabkan matriks tersebut hampir *singular* yang mengakibatkan nilai dari penduga parameternya tidak dapat ditemukan (Hoerl dan Kennard, 1970).

Untuk mengetahui adanya multikolinieritas yaitu dengan melihat nilai $VIF > 10$. Gejala multikolinieritas menimbulkan masalah dalam model regresi. Korelasi antar

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

variabel bebas yang sangat tinggi menghasilkan penduga model regresi yang berbias, tidak stabil, dan mungkin jauh dari nilai prediksinya (Bilfarsah, 2005).

Beberapa penelitian mengenai metode yang dapat digunakan untuk mengatasi masalah multikolinieritas telah banyak dilakukan, seperti metode regresi ridge, *partial least square*, analisis faktor, regresi komponen utama dan *latent root regression* (LRR). Dalam hal ini, metode *Latent Root Regression* (LRR) belum banyak yang menggunakannya dalam sebuah penelitian. Oleh karena itu, perlu adanya pembahasan lebih lanjut mengenai *Latent Root Regression* (LRR).

Metode *Latent Root Regression* (LRR) merupakan perluasan dari metode regresi komponen utama. Perluasan regresi komponen utama untuk pemeriksaan persamaan peramalan alternatif dan untuk pembuangan peubah peramal yang telah diajukan oleh J. T. Webster, R. F. Gunst, dan R. L. Mason, dalam "*Latent root regression analysis*", *Technometrics*, 16, 1974. Webster dan rekannya menggabungkan matriks data yang berasal dari variabel peramal dengan variabel respon yang telah dibakukan. Perluasan ini dinamakan *Latent Root Regression* (Draper dan Smith, 1992).

Konsep regresi komponen utama sendiri yaitu dengan tahap analisis dengan menggunakan analisis komponen utama. Melalui penggunaan analisis ini akan dihasilkan variabel-variabel baru (komponen utama) yang merupakan kombinasi linier dari variabel-variabel bebas asal dan antar variabel bebas baru ini bersifat saling bebas. Selanjutnya, diregresikan dengan variabel respon (Marcus, Wattimanela dan Lesnussa, 2012). Sedangkan komponen utama dalam regresi akar laten diperoleh dari matriks korelasi gandengan dengan variabel bebas dan variabel respon yang telah dibakukan.

Berdasarkan penelitian dan uraian di atas, maka penulis tertarik untuk membahas masalah multikolinieritas dan metode yang dapat mengatasinya, yaitu menggunakan metode *Latent Root Regression* (LRR) dalam mengatasi masalah multikolinieritas.

2. LANDASAN TEORI

2.1 Matriks

Secara umum, sebuah matriks $\boldsymbol{A}$ yang berukuran m baris dan n kolom dengan elemen a_{ij} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A}_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots., n$.

2.2 Determinan matriks

Definisi 2.1 (Santosa, 2009:25)

Bila matriks $\boldsymbol{A}$ adalah matriks berukuran n x n, maka minor elemen a_{ij} (disimbolkan dengan M_{ij}) didefinisikan sebagai determinan dari submatriks yang ada setelah baris ke-i dan kolom ke-j dicoret dari $\boldsymbol{A}$. Nilai $(-1)^{i+j}$ dituliskan sebagai C_{ij} dan dinamakan **kofaktor** elemen a_{ij}. Jadi, $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

2.3 Nilai eigen dan vektor eigen

Definisi 2.2 (Santosa, 2009:159)

Jika **A** adalah sebuah matriks berukuran n x n, maka sebuah vektor tak nol $\boldsymbol{\gamma}$ di R^n dinamakan vektor eigen dari **A** jika $\boldsymbol{A\gamma}$ adalah kelipatan skalar dari $\boldsymbol{\gamma}$, yaitu:

$$\boldsymbol{A\gamma} = \boldsymbol{\lambda\gamma} \quad (2.2)$$

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

Skalar $\boldsymbol{\lambda}$ ini dinamakan **nilai eigen** dari A, sedangkan $\boldsymbol{\gamma}$ dinamakan **vektor eigen** yang bersesuaian dengan $\boldsymbol{\lambda}$.

2.4 Analisis regresi linier berganda

Model pada analisis regresi linier berganda adalah:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \qquad (2.3)$$

Keterangan:

Y_i : variabel respon pengamatan ke-i
X_{ij} : variabel bebas ke-j pada pengamatan ke-i
$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$: parameter regresi
ε_i : galat (*error*) pengamatan ke-i dan $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$
$i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, k$

2.4.1 Asumsi regresi linier berganda

Menurut Gujarati (2003) asumsi-asumsi pada model regresi linier berganda adalah sebagai berikut:

1. *Error* berdistribusi normal
2. Variansi dari *error* adalah konstan (homoskedastisitas)
3. Tidak terjadi autokorelasi pada *error* (untuk data time series)
4. Tidak terjadi multikolinieritas pada variabel bebas

2.4.2 Estimasi parameter

Menurut Kutner, *et al* (2005) salah satu metode yang digunakan dalam mengestimasi parameter adalah metode kuadrat terkecil atau sering juga disebut dengan metode *Ordinary Least Square* (OLS). Metode OLS ini bertujuan untuk mengestimasi parameter dengan cara meminimumkan jumlah kuadrat galat:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_{i1} - \beta_2 X_{i2} - \cdots - \beta_k X_{ik})^2 \qquad (2.4)$$

Sehingga diperoleh penduga kuadrat terkecil dari $\boldsymbol{\beta}$ sebagai berikut:

$$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Y} \qquad (2.5)$$

2.4.3 Pengujian parameter

1. Pengujian parameter secara simultan

Hipotesis:

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0$ Vs H_1 : paling sedikit ada satu $\beta_j \neq 0$ dengan $j = 1,2, \dots, k$

Statistik uji:

$$F_{hitung} = \frac{KTR}{KTG} = \frac{JKR/(k-1)}{JKG/(n-k)} = \frac{JKR(n-k)}{JKG(k-1)} \qquad (2.6)$$

Titik kritis:

$F_{tabel} = F_{(1-\alpha; k, (n-k-1))}$

Daerah penolakan:

H_0 ditolak pada taraf α jika $F_{hitung} > F_{tabel}$, sebaliknya jika $F_{hitung} \leq F_{tabel}$ maka H_0 diterima pada taraf α.

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

2. Pengujian parameter secara parsial

Hipotesis:

$H_0 : \beta_j = 0$ Vs $H_1 : \beta_j \neq 0$ dengan $j = 1,2,\dots,k$

Statistik uji:

$$t = \frac{b_j}{s\{b_j\}} \tag{2.7}$$

Titik Kritis:

$t_{tabel} = t_{(1-\alpha/2;\,(n-k-1))}$

Daerah penolakan:

Jika $t > t_{tabel}$ untuk derajat bebas $n-k-1$ maka hipotesis H_0 ditolak pada taraf α, sebaliknya jika $t \leq t_{tabel}$ maka H_0 diterima pada taraf α.

2.5 Korelasi

Koefisien korelasi adalah angka yang menunjukkan tingginya derajat hubungan antara dua variabel acak yang diteliti dan merupakan nilai baku dari kovarian kedua variabel tersebut. Nilai korelasi terletak di antara -1 dam 1 ($-1 \leq r \leq 1$) (Soelistyo, 2000).

2.6 Koefisien determinasi

Proporsi keragaman data yang dapat dijelaskan dalam model regresi dilihat dari koefisien determinasi yang dilambangkan dengan R^2. Koefisien determinasi didefinisikan sebagai berikut:

$$R^2 = \frac{\boldsymbol{b'X'Y} - \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\right)\boldsymbol{Y'JY}}{\boldsymbol{Y'Y} - \left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{n}}\right)\boldsymbol{Y'JY}} = \frac{JKR}{JKT} \tag{2.8}$$

Nilai R^2 terletak pada interval $0 \leq R^2 \leq 1$.

2.7 Multikolinieritas

Istilah multikolinieritas pertama kali diperkenalkan oleh Ragnar Frisch pada tahun 1934, yang berarti adanya korelasi di antara variabel-variabel bebas dari model regresi. Multikolinieritas adalah terjadinya hubungan linier antara variabel bebas dalam suatu model regresi linier berganda (Gujarati, 2003).

Untuk mendeteksi adanya multikolinieritas dapat didilihat nilai *Variance Inflation Factor* (VIF) dan *Tolerance* (TOL) dengan ketentuan jika nilai $VIF > 10$, maka terjadi multikolinieritas dalam model regresi. VIF merupakan elemen diagonal utama dari matriks korelasi ($(X'X)^{-1}$).

2.8 Regresi komponen utama

Regresi komponen utama merupakan teknik analisis regresi yang dikombinasikan dengan analisis komponen utama yang dijadikan sebagai tahap analisis (Marcus, Wattimanela dan Lenussa, 2012).

Tahap pertama pada regresi komponen utama adalah menghitung komponen utama yang merupakan kombinasi linier dari variabel bebas. Langkah selanjutnya, beberapa komponen utama yang terbentuk diregresikan dengan variabel respon melalui analisis regresi (Myers dan Milton, 1991). Kriteria pemilihan komponen utama yang akan digunakan yaitu dengan memilih komponen utama yang bersesuaian dengan akar ciri lebih besar dari 1 (Draper dan Smith, 1992).

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

3. METODE *LATENT ROOT REGRESSION* (LRR)

3.1 Pemusatan dan penskalaan

Pemusatan menjelaskan perbedaan antara masing-masing pengamatan dan rata-rata dari semua pengamatan untuk variabel. Sedangkan penskalaan menjelaskan gambaran pemusatan pengamatan pada kesatuan (unit) standar deviasi dari pengamatan untuk variabel (Kutner, *et al*., 2005).

Pembakuan variabel respon Y dan variabel bebas $X_1, X_2, \dots, X_k$ dalam hal ini dapat dilakukan sebagai berikut:

$$\frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y} \quad \text{, di mana} \quad S_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}{n-1}} \tag{3.1}$$

$$\frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{S_{X_j}} \quad \text{, di mana} \quad S_{X_j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_{ij} - \bar{X}_j\right)^2}{n-1}} \tag{3.2}$$

Keterangan:

$\bar{Y}$: rata-rata dari Y

$\bar{X}_j$: rata-rata dari pengamatan X_j

S_Y : standar deviasi dari Y

S_{X_j} : standar deviasi dari X_j

$j = 1, 2, \dots, k$

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa tranformasi korelasi merupakan fungsi sederhana dari pembakuan variabel pada persamaan (3.1) dan (3.2). Sehingga dengan cara transformasi korelasi maka diperoleh:

$$\boldsymbol{Z}_y = [Z_{iy}] = \left[\frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{S_Y}\right)\right]; \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{Z} = [Z_{ij}] = \left[\frac{1}{\sqrt{n-1}}\left(\frac{X_{ij} - \bar{X}_j}{S_{X_j}}\right)\right]; \quad i = 1, 2, \dots, n \; dan \; j = 1, 2, \dots, k \tag{3.4}$$

Berdasarkan variabel yang ditransformasi Z_{iy} dan Z_{ij} yang didefinisikan dengan transformasi korelasi pada persamaan (3.3) dan (3.4) di atas, maka diperoleh model regresi sebagai berikut:

$$Z_{iy} = \beta_1^* Z_{i1} + \beta_2^* Z_{i2} + \cdots + \beta_k^* Z_{ik} + \varepsilon_i^* \tag{3.5}$$

Persamaan (3.5) di atas disebut sebagai model regresi yang baku (*standardized regression model*).

3.2 Matriks korelasi gabungan

Menurut Draper dan Smith (1992) pada metode LRR, matriks korelasi yang digunakan merupakan matriks yang diperoleh dari penggabungan antara variabel respon dan variabel bebas yang telah dibakukan dengan $\boldsymbol{Z_y}$ dan $\boldsymbol{Z}$ dapat ditulis dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\boldsymbol{Z}^* = \begin{bmatrix} Z_{1y} & Z_{11} & \cdots & Z_{1k} \\ Z_{2y} & Z_{21} & \cdots & Z_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{ny} & Z_{n1} & \cdots & Z_{nk} \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Berdasarkan persamaan (3.6) maka matriks korelasi gabungannya dapat dituliskan sebagai berikut:

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

$$\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^{*} = \begin{bmatrix} 1 & r_{2Y} & \cdots & r_{kY} \\ r_{2Y} & 1 & \cdots & r_{k1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{kY} & r_{k1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

3.3 Analisis komponen utama pada metode LRR

Seperti halnya dalam analisis komponen utama, akar laten dan vektor laten dapat dihitung dari matriks korelasi gabungan $\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^{*}$. Menurut Webster, Gunst dan Mason (1974) dengan mengikuti definisi 2.10 serta persamaan (2.3) dan (2.4) akar laten dan vektor laten dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$|\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^{*} - \lambda\boldsymbol{I}| = 0 \tag{3.8}$$

dan

$$\left(\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^{*} - \lambda_j\boldsymbol{I}\right)\gamma_j = \boldsymbol{0} \quad ;\ j = 0, 1, 2, \dots, k \tag{3.9}$$

Misalkan $\gamma_j' = \left(\gamma_{0j},\ \gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{kj}\right)$ merupakan vektor laten ke-$j$dari matriks $\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^{*}$ dan $\gamma_j^0 = \left(\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \dots, \gamma_{kj}\right)$ merupakan vektor laten yang terbentuk dari elemen yang sama dengan γ_j' kecuali elemen pertama yang telah dibuang. Akhirnya, misalkan $\boldsymbol{\Gamma} = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k)$ dan $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_0,\ \lambda_1, \dots, \lambda_k)$, maka $\boldsymbol{\Gamma}'(\mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{Z}^{*})\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Lambda}$ dan $\mathbf{Z}^{*\prime}\mathbf{Z}^{*} = \boldsymbol{\Gamma\Lambda\Gamma}'$.

Selanjutnya, komponen utama (*principal component*) dari matriks $\boldsymbol{Z}^{*}$ adalah:

$$PC_j = \boldsymbol{Z}_y\gamma_{0j} + \boldsymbol{Z}\gamma_j^0 \tag{3.10}$$

dan

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{n}\left(Z_{iy} * \gamma_{0j} + \sum_{r=1}^{k} Z_{ir} * \gamma_{rj}\right)^2 \tag{3.11}$$

Selanjutnya, komponen utama yang akan digunakan pada tahap analisis diperoleh dengan membuang komponen utama yang bersesuaian dengan nilai akar laten $\lambda_j \leq$ 0,05 dan elemen pertama vektor laten $\left|\gamma_{0j}\right| < 0{,}10$ (Webster, Gunst dan Mason, 1974).

3.4 Koefisien regresi termodifikasi

Sehingga diperoleh koefisien kuadrat terkecil termodifikasi yaitu

$$\boldsymbol{b}^{*} = \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ \vdots \\ b_k^* \end{bmatrix} = c\sum_{j=p}^{k}\gamma_{0j}\lambda_j^{-1}\begin{bmatrix} \gamma_{1j} \\ \gamma_{2j} \\ \vdots \\ \gamma_{rj} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

dengan c adalah konstanta yaitu:

$$c = -\left\{\sum_{j=p}^{k}\gamma_{0j}^2\lambda_j^{-1}\right\}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2\right\}^{1/2} \tag{3.13}$$

Keterangan:

λ_j : akar laten ke-j dari matriks $\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^{*}$
γ_{tj} : elemen vektor laten ke-j
γ_{0j} : elemen pertama dari vektor laten ke-j
$j = 1, 2, \dots k$ dan $t = 1, 2, \dots r$

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

Selanjutnya, menurut Draper dan Smith (1992) penduga koefisien regresi pada variabel asal diperoleh dengan membagi penduga koefisien regresi pada variabel yang telah dibakukan dengan S_j sehingga diperoleh:

$$b_j = \frac{b_j^*}{S_j} \tag{3.14}$$

dengan

$$S_j = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} \left(X_j - \bar{X}_j\right)^2}$$

Sedangkan untuk perhitungan koefisien regresi b_0 diperoleh berdasarkan rumus:

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}_1 - b_2\bar{X}_2 - \cdots - b_k\bar{X}_k \tag{3.15}$$

3.5 Metode eliminasi *backward*

Menurut Webster, Gunst dan Mason (1974) kemudian untuk menentukan variabel bebas yang akan dihapus dari model maka dapat digunakan statitik uji-F yaitu

$$F = \left[\frac{SSE\ (semua\ X\ kecuali\ X_r)}{\eta^2 {\rho_{00}}^{-1}}\right](n-k-1) \tag{3.16}$$

sehingga menjadi

$$F = \left[\frac{\eta^2\left(\rho_{00} - \frac{{\rho_{0r}}^2}{\rho_{rr}}\right)^{-1}}{\eta^2 {\rho_{00}}^{-1}}\right](n-k-1) \tag{3.17}$$

dengan pembanding $F_{tabel} = F_{(1-\alpha;1,(n-k-1))}$. Jika $F_{hitung} > F_{tabel}$ untuk derajat bebas 1 dan $n-k-1$ maka variabel bebas X_r tidak dihapus dari model. Sebaliknya, jika $F_{hitung} \leq F_{tabel}$ maka variabel bebas X_r dihapus dari model.

4. TELADAN PENERAPAN

Teladan yang digunakan pada metode *Latent Root Regression* (LRR) dalam mengatasi masalah multikolinieritas diambil dari teladan pada buku "*Applied Linear Statistical Models Fifth Edition"* oleh Kutner, *et al*. (2005: 256-257). Data disajikan dalam Tabel 1 mengenai data persentase lemak tubuh 20 wanita dengan variabel yang mempengaruhinya yaitu *triceps skinfold thickness* (mm) (X_1), *thigh circumference* (mm) (X_2) dan *mid arm circumference* (mm) (X_3).

4.1 Regresi linier berganda

Setelah data dianalisis, data terbukti memenuhi asumsi normalitas yang ditunjukkan dari nilai $p-value$ dari uji Anderson Darling yaitu $p-value = 0{,}737 > 0{,}05$. Selanjutnya, data tidak terdapat autokorelasi ditunjukkan dari uji Durbin-Watson bahwa $d = 2{,}2429 > d_u = 1{,}676$ artinya tidak terdapat autokorelasi positif dan $(4-d) = 1{,}7571 > d_u = 1{,}676$ artinya tidak terdapat autokorelasi negatif. Selanjutnya, data tidak mengandung heteroskedastisitas yang ditunjukkan dari uji Glejser. Selanjutnya, nilai VIF antar variabel bebas yatu $VIF_1 = 708{,}8429$; $VIF_2 = 564{,}3434$ dan $VIF_3 = 104{,}6060$ melebihi nilai 10. Artinya data pada teladan ini terdeteksi adanya

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

multikolinieritas. Akibat dari multikolinieritas, secara individu variabel bebas tidak berpengaruh terhadap variabel respon, tetapi nilai koefisien determinasi (R^2) bernilai 80,14%. Sehingga diperlukan cara dalam mengatasi masalah multikolinieritas yaitu salah satunya digunakan metode *Latent Root Regression* (LRR).

4.2 Pembakuan data

$\boldsymbol{Z}_y$ hasil pembakuan data variabel $\boldsymbol{Y}$ yang dihitung dari persamaan (3.3) dan $\boldsymbol{Z}_j$ hasil pembakuan data variabel $\boldsymbol{X}_j$ yang dihitung dari persamaan (3.4) untuk $i = 1, 2, \dots, 20$ dan $j = 1, 2, 3$.

4.3 Perhitungan matriks korelasi gabungan

Terlebih dahulu menghitung matriks gabungannya yaitu

$$\mathbf{Z^*}_{20\times 4} = [\mathbf{Z_y}, \mathbf{Z}]_{20\times 4}$$
$$= \begin{bmatrix} -0{,}3727 & -0{,}2651 & -0{,}3537 & 0{,}0931 \\ 0{,}1170 & -0{,}0276 & -0{,}0600 & 0{,}0365 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0{,}0407 & -0{,}0048 & -0{,}0075 & -0{,}0075 \end{bmatrix}_{20\times 4}$$

Selanjutnya, menghitung matriks korelasi gabungan yakni diperoleh

$$\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0{,}8433 & 0{,}8781 & 0{,}1424 \\ 0{,}8433 & 1 & 0{,}9238 & 0{,}4578 \\ 0{,}8781 & 0{,}9238 & 1 & 0{,}0847 \\ 0{,}1424 & 0{,}4578 & 0{,}0847 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 4}$$

4.4 Akar laten dan vektor laten

Berdasarkan hasil dari perhitungan matriks korelasi gabungan maka dapat dicari akar laten λ_j dan vektor laten Γ_j dengan $j = 0, 1, 2, 3$ yang bersesuaian dengan λ_j dibentuk dari matriks korelasi gabungan $\boldsymbol{Z}^{*\prime}\boldsymbol{Z}^*$. Hasil nilai akar laten dan vektor laten yang bersesuaian disajikan pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Nilai akar laten dan vektor laten

akar Laten	$\boldsymbol{Z_y}$	$\boldsymbol{Z_1}$	$\boldsymbol{Z_2}$	$\boldsymbol{Z_3}$
$\boldsymbol{\lambda_j}$	$\boldsymbol{\gamma_{0j}}$	$\boldsymbol{\gamma_{1j}}$	$\boldsymbol{\gamma_{2j}}$	$\boldsymbol{\gamma_{3j}}$
0,0007	0,0178	-0,7248	0,6310	0,2760
0,1484	0,8079	-0,3479	-0,4654	0,0981
1,0013	-0,2151	0,1186	-0,2655	0,9323
2,8497	0,5483	0,5827	0,5611	0,2121

4.5 Pembentukan komponen utama

Berdasarkan hasil akar laten dan vektor laten di atas, dapat diketahui bahwa terdapat akar laten yang nilainya kurang dari 0,05 yaitu $\lambda_0 = 0{,}0007 \leq 0{,}05$. Selanjutnya, memeriksa vektor laten yang bersesuaian dengan λ_0. Untuk γ_{00} nilainya 0,0178, artinya nilai $|\gamma_{00} = 0{,}0178| < 0{,}10$. Oleh karena itu, akar laten dan vektor laten yang bersesuaian tersebut harus dihapus. Sehingga komponen utama yang digunakan yaitu

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

$$\boldsymbol{PC}_1 = 0{,}8079\mathbf{Z}_y - 0{,}3479\mathbf{Z}_1 - 0{,}4654\mathbf{Z}_2 + 0{,}0981\mathbf{Z}_3$$
$$\boldsymbol{PC}_2 = -0{,}2151\mathbf{Z}_y + 0{,}1186\mathbf{Z}_1 - 0{,}2655\mathbf{Z}_2 + 0{,}9323\mathbf{Z}_3$$
$$\boldsymbol{PC}_3 = 0{,}5483\mathbf{Z}_y + 0{,}5827\mathbf{Z}_1 + 0{,}5611\mathbf{Z}_2 + 0{,}2121\mathbf{Z}_3$$

Komponen utama tersebut diregresikan dengan variabel respon untuk melihat apakah masalah multikolinieritas telah teratasi. Proses analisis regresi tersebut dinamakan analisis regresi akar laten (*Latent Root Regression)*. Berdasarkan analisis regresi akar laten diperoleh model regresi yang terbentuk yaitu:

$$\boldsymbol{Y} = 20{,}1950 + 17{,}9823\boldsymbol{PC}_1 - 4{,}7873\boldsymbol{PC}_2 + 12{,}2045\boldsymbol{PC}_3$$

Berdasarkan hasil analisis regresi akar laten diperoleh nilai VIF masing-masing dari komponen utama sebesar $1{,}000$ dan nilai korelasi antar $\boldsymbol{PC}_1$ dan $\boldsymbol{PC}_2$ bernilai $1{,}3797 \times 10^{-9}$, $\boldsymbol{PC}_1$ dan $\boldsymbol{PC}_3$ bernilai $1{,}3871 \times 10^{-8}$ dan $\boldsymbol{PC}_2$ dan $\boldsymbol{PC}_3$ bernilai $-9{,}7716 \times 10^{-9}$. Hal ini menunjukkan bahwa masalah multikolinieritas dapat diatasi secara tuntas.

4.6 Koefisien regresi kuadrat terkecil

Hasil koefisien regresi kuadrat terkecil dapat dilihat pada Tabel 2 berikut:

Tabel 2. Koefisien regresi kuadrat terkecil

Koefisien	*j*			
	0	1	2	3
b*	20,1950	8,8411	11,5862	-1,8337
b	-12,8201	0,4038	0,5078	-0,1153

dengan $\boldsymbol{b}^*$ merupakan koefisien regresi kuadrat terkecil termodifikasi untuk variabel yang telah dibakukan, sedangkan $\boldsymbol{b}$ merupakan koefisien regresi kuadrat terkecil untuk variabel awal. Sehingga model regresi untuk data awal diperoleh sebagai berikut

$$Y = -12{,}8201 + 0{,}4038X_1 + 0{,}5078X_2 - 0{,}1153X_3$$

Model regresi di atas dapat diinterpretasikan bahwa pada saat semua variabel bebas konstan, maka variabel persentase lemak tubuh akan bernilai $-12{,}8201$. Variabel persentase lemak tubuh akan meningkat sebesar $0{,}4038$ setiap kenaikan X_1 satu mm selama X_2 dan X_3 bernilai konstan. Variabel persentase lemak tubuh akan meningkat sebesar $0{,}5078$ setiap kenaikan X_2 satu mm selama X_1 dan X_3 bernilai konstan. Variabel persentase lemak tubuh akan berkurang sebesar $0{,}1153$ setiap kenaikan X_3 satu mm selama X_1 dan X_2 bernilai konstan.

Selanjutnya, untuk melihat keakuratan model yang diperoleh, dapat dilihat dari koefisien determinasi yaitu bernilai 100% artinya model dapat dikatakan baik atau akurat. Nilai koefisien determinasi sebesar 100% bermakna bahwa sebesar 100% variansi dari besarnya nilai persentase lemak tubuh (Y) dapat dijelaskan oleh *triceps skinfold thickness* (X_1), *thigh circumference* (X_2) dan *mid arm circumference* (X_3) dalam hubungan linier.

4.7 Metode eliminasi *backward*

Selanjutnya, dilakukan proses eliminasi *backward* (langkah mundur) untuk mengeluarkan variabel bebas yang tidak berpengaruh terhadap model. Hasil uji-F yang dihasilkan dengan penghapusan variabel X_r dengan $r = 1, 2, 3$ yaitu

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

Tabel 3. Pengujian eliminasi *backward*

Variabel	$n-k-1$	F_{tabel}	F_{hitung}
X_1	16	0,0041	65,7546
X_2			64,4421
X_3			16,5384

Berdasarkan Tabel 3 di atas, untuk menguji variabel X_1 dihapus dari model terlihat dari nilai $F_{hitung} = 65{,}7546 > 0{,}0041$ artinya variabel X_1 tetap dipertahankan dalam model. Selanjutnya, untuk menguji variabel X_2 dihapus dari model terlihat nilai $F_{hitung} = 64{,}4421 > 0{,}0041$ artinya variabel X_2 tetap dipertahankan dalam model. Selanjutnya, untuk menguji variabel X_3 dihapus dari model terlihat nilai $F_{hitung} = 16{,}5384 > 0{,}0041$ artinya variabel X_3 tetap dipertahankan dalam model. Sehingga dapat dikatakan bahwa tidak ada variabel bebas yang dihapus atau dikeluarkan dari model.

5. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian maka dapat disimpulkan bahwa:

1. Multikolinieritas dapat dideteksi dengan cara melihat nilai VIF (*Variance Inflation Factor*) yang melebihi nilai 10.
2. Prosedur metode LRR (*Latent Root Regression*) untuk mengatasi adanya multikolinieritas yaitu:
   - Membakukan data (variabel respon **Y** dan variabel bebas **X)**
   - Membuat matriks gabungan dari variabel yang telah dibakukan, dilambangkan dengan $\boldsymbol{Z}^* = [\boldsymbol{Z}_y : \boldsymbol{Z}]$
   - Menghitung matriks korelasi gabungan dari matriks $\boldsymbol{Z}^*$
   - Menghitung akar laten dan vektor laten berdasarkan matriks korelasi gabungan
   - Memilih komponen utama yang digunakan dengan membuang komponen utama yang mempunyai akar laten $\lambda_j \leq 0{,}05$ dan elemen pertama dari vektor laten $|\gamma_{0j}| < 0{,}10$
   - Berdasarkan langkah 5, komponen utama yang telah ditentukan tersebut diregresikan dengan variabel respon
   - Menghitung nilai korelasi dan nilai VIF antar variabel komponen utama untuk mendeteksi apakah masalah multikolinieritas sudah teratasi
   - Menghitung pendugaan koefisien regresi pada data yang telah dibakukan
   - Menghitung endugaan koefisien regresi pada variabel awal
   - Menerapkan metode eliminasi *backward*.

5.2 Saran

Dalam penulisan skripsi ini, penulis hanya membahas pelanggaran asumsi multikolinieritas yaitu mengatasinya dengan menggunakan metode *Latent Root Regression* (LRR). Untuk penelitian selanjutnya, dapat dibahas mengenai perbandingan metode regresi komponen utama dan regresi akar laten dalam mengatasi masalah multikolinieritas.

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu

DAFTAR PUSTAKA

Bilfarsah, A, 2005, Efektifitas Metode Aditif Spline Kuadrat Terkecil Parsial dalam Pendugaan Model Regresi, *Makara, Sains*, Vol. 9, No.1, Halm: 28-33.

Draper, N. R dan H. Smith, 1992, *Analisis Regresi Terapan*, Edisi Kedua, Diterjemahkan oleh Bambang Sumantri, Jurusan Statistika FMIPA IPB, Bogor.

Gujarati, D. N, 2003, *Basic Econometrics, Fourth Edition*, McGraw-Hill Higher Education, New York.

Hoerl, A. E dan R. W. Kennard, 1970, Ridge Regression: Biased Estimationfor Non Orthogonal Problem. *Technometrics,* Vol. 12, No. 1, Halm: 55-67.

Johnson, R. A dan D. W, Wichern, 2002, *Applied Multivariate Statistical Analysis*, *Fifth Edition*, Pearson Education International.

Kutner, M. H., C. J, Nachtsheim., J. Neter dan W. Li, 2005, *Applied Linear Statistical Model*, *Fifth Edition*, McGraw-Hill, New York.

Marcus, G. L., H. J, Wattimanela dan Y. A, Lesnussa, 2012, Analisis Regresi Komponen Utama untuk Mengatasi Masalah Multikolinieritas dalam Analisis Regresi Linier Berganda, *Jurnal Barekeng*, Vol. 7, No.1, Halm: 31-40.

Myers, R. H dan J. S, Milton, 1991, *A First Course In The Theory of Linier Statistical Models,* PWS-KENT Publihing Company, Boston.

Santosa, R. G, 2009, *Aljabar Linier Dasar*, ANDI, Yogyakarta.

Sembiring, R. K, 2003, *Analisis Regresi*, ITB, Bandung.

Sharma, S dan W. L, James, 1986, Latent Root Regression: An Alternate Procedure for Estimating Parameters in the Presence of Multicollinearity, *Journal of Marketing Reseacrh*, Vol. 18, No. 2, PP: 154-161.

Soelistyo, 2000, *Dasar-dasar Ekonometrika*, Edisi pertama, BPFE, Yogyakarta.

Webster, J. T., R. F. Gunst dan R. L. Mason. 1974. Latent Root Regression Analysis. *Technometrics*, Vo. 16, No.4, PP: 513-522.

[1]Alumni Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu
[2,3]Staf Pengajar Jurusan Matematika FMIPA Universitas Bengkulu