PEMODELAN KEJADIAN POISSON PADA *SMALL AREA ESTIMATION* MENGGUNAKAN METODE *HIERARCHICAL BAYES* DENGAN FUNGSI PRIOR LOG-NORMAL

Anita Nurul Fitriani*, Sigit Nugroho, Etis Sunandi*****
***Mahasiswa Matematika, **Dosen Pembimbing Utama,**
*****Dosen Pembimbing Pendamping**

Tujuan penelitian ini adalah menjelaskan dan mempelajari langkah-langkah pendugaan parameter pada *Small Area Estimation* menggunakan metode *Hierarchical Bayes* dengan fungsi prior Log-Normal. Di dalam penelitian ini terdapat salah satu metode untuk menduga parameter pada *Small Area Estimation* yaitu *Hierarchical Bayes*. *Small Area* didefinisikan sebagai bagian dari populasi yang memiliki ukuran contoh kecil. Metode *Hierarchical Bayes* ini digunakan pada data cacahan dengan fungsi prior Log-Normal. Metode pada penelitian ini adalah studi literatur. Hasil penelitian menunjukkan bahwa parameter untuk data cacahan pada *Small Area Estimation* yaitu pendugaan rata-rata dari fungsi prior Log-Normal memberikan hasil pendugaan dengan ketelitian yang lebih baik dibandingkan pendugaan langsung.

Kata Kunci: *Hierarchical Bayes*, *Small Area Estimation*, fungsi prior Log-Normal

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Suatu survei dilakukan dengan tujuan untuk menduga parameter populasi yang cakupannya meliputi suatu area yang luas. Tidak hanya dimanfaatkan untuk menduga parameter keseluruhan, hasil survei juga digunakan untuk menduga parameter pada bagian dari populasi (*sub population*) atau area yang lebih kecil (*small area*), misalnya informasi pada level provinsi, kabupaten, bahkan mungkin level kecamatan. Jika ukuran sampel yang tersedia dari survei tersebut sudah cukup memenuhi atau sesuai dengan keakuratan yang dispesifikasikan untuk menduga parameter *sub population*, maka pendugaan parameter dapat dilakukan secara langsung (*direct estimation*). Pendugaan langsung umumnya didasarkan pada penarikan contohnya (*sampling techinique*). Misalnya, *simple random sampling*, *systematic random sampling*, *stratified random sampling*, *cluster random sampling*, dan lain sebagainya.

Menurut Kurnia (2009) permasalahan penting yang ditimbulkan oleh metode pendugaan langsung terhadap area kecil tersebut ada dua. Pertama, penduga yang dihasilkan merupakan penduga tak bias tetapi memiliki ragam yang besar karena diperoleh dari ukuran contoh yang kecil. Kedua, apabila pada suatu area kecil ke-i tidak terwakili di dalam survei, maka tidak memungkinkan dilakukan pendugaan secara langsung. Oleh karena itu, perlu dikembangkan suatu metode pendugaan dengan cara tidak langsung (*indirect estimation*), dengan tujuan untuk meningkatkan keefektifan ukuran contoh dan menurunkan keragaman sehingga lebih akurat. Pendugaan tersebut dikenal sebagai *Small Area Estimation* (SAE).

Small Area Estimation (SAE) merupakan suatu teknik statistika untuk menduga parameter-parameter subpopulasi yang ukuran contohnya kecil. Pengertian *small area* tidak hanya mengacu pada suatu area/wilayah (mengacu pada pengertian secara geografis), namun *small area* dapat juga mengacu pada suatu bagian dari populasi yang didefinisikan menurut kriteria tertentu, misalnya berdasarkan jenis kelamin, ras, usia dan lain-lain (Rao, 2003).

Berdasarkan sumber data yang digunakan, SAE diklasifikasikan menjadi, (1) data *cross section* yaitu data yang terdiri dari satu objek namun memerlukan sub objek-sub objek lainnya yang berkaitan atau yang berada dalam objek induk tersebut pada suatu waktu, (2) data *time series* yaitu data yang terdiri dari satu objek namun terdiri dari beberapa periode waktu, seperti harian, mingguan, bulanan, dan tahunan, (3) gabungan antara data *cross section* dan data *time series*. Berdasarkan tipe penarikan kesimpulan yang digunakan, SAE dapat digolongkan sebagai, (1) metode berdasarkan rancangan (*design-based*), (2) metode berdasarkan model (*model-based*) yang terdiri atas pendekatan *frequentist* dan Bayesian, (3) gabungan antara *design-based* dan *model-based*. Berdasarkan tingkat (*level*) ketersediaan data penyerta, model SAE terdiri atas, (1) area level dan (2) unit level (Handayani, 2015).

Metode SAE telah banyak digunakan bebasis model (*model-based area estimation*) yang diperkenalkan dalam Ghosh dan Rao (1994), diantaranya adalah *Best Linear Unbiased Prediction* (*BLUP*), *Empirical Best Linear Unbiased Prediction* (*EBLUP*), *Empirical Bayes* (*EB*), dan *Hierarchical Bayes* (*HB*). Metode *BLUP* dan *EBLUP* merupakan metode untuk data kontinu sedangkan *EB* dan *HB* adalah metode untuk data biner atau cacahan.Pemodelan SAE yang sedang banyak dikaji adalah pemodelan dengan menerapkan kaidah *Bayes* (*Bayesian Estimation*), karena lebih menguntungkan dengan mempunyai nilai *Mean Square Error* (MSE) yang lebih kecil dibandingkan BLUP atau EBLUP.

Konsep *Bayes* digunakan karena pendugaan pada domain dengan sampel yang kecil sangat membutuhkan informasi pendukung, baik yang berasal dari penelitian sebelumnya, bahkan dari sebuah penilaian yang subjektif atau spesifik tiap domain/area. Pada pemodelan SAE dimasukkan pula pengaruh acak area yang sangat memungkinkan untuk menganggap bahwa parameter yang tidak diketahui dalam model adalah bersifat acak/random mengikuti distribusi tertentu serta dipengaruhi oleh serangkaian variabel prediktor yang dianggap sebagai informasi prior.

Metode estimasi Bayes yang akhir-akhir ini banyak dikembangkan adalah EB dan HB. Salah satu kelebihan kedua metode ini adalah masalah inferensi parameternya yang dapat dijelaskan dengan menggunakan fungsi kepekatan posterior dugaan. Tetapi, pada metode EB hanya memasukkan informasi prior empiris (berdasarkan data), sedangkan metode HB memasukkan informasi prior empiris dan prior subjektif. Selain itu Kelebihan metode HB adalah masalah inferensinya relatif lebih jelas dan tepat serta komputasinya juga relatif lebih mudah dengan menggunakan teknik *Marcov Chain Monte Carlo* (MCMC) dan juga mampu mengatasi model dengan efek acak mengikuti distribusi selain distribusi Normal (Hajarisman, 2013).

Dari beberapa metode yang telah dikemukakan, pemilihan model yang tepat memungkinkan akan menghasilkan estimasi yang cukup baik dari sampel yang kecil, asalkan tersedia data pendukung yang lengkap dan berkaitan dengan data yang hendak diteliti. Penerapan pendugaan parameter pada data cacahan adalah menggunakan distribusi Poisson, karena menyatakan banyaknya “kejadian langka” yang terjadi dalam suatu selang waktu tertentu.

Terdapat banyak penelitian mengenai *Small Area Estimation* dengan metode bayes di indonesia, diantaranya Kismiantini (2007) meneliti “Pendekatan Bayes Empirik pada Pendugaan Statistik Area Kecil Berbasis Model Poisson-Gamma dengan Peubah Penyerta”. Nadhiroh (2008) meneliti “*Zero Inflated Negative Binomial Models In Small Area Estimation*”. Hadi dan Nusyirwan (2008) meneliti “Penduga Maksimum Likelihood untuk Parameter Dispersi Model Poisson-Gamma dalam Konteks Penduga Area Kecil”. Kismiantini (2008) meneliti “Pendugaan Berbasis Model untuk Kasus Biner pada *Small Area Estimation*”. Kismiantini (2010) meneliti “Penerapan Metode Bayes Empirik pada Pendugaan Area Kecil untuk Kasus Biner”. Sunandi (2013) meneliti “Model Spasial Bayes dalam Pendugaan Area Kecil dengan Peubah Respon Biner”. Rumiati (2012) meneliti “*Empirical Bayesian Method For The Estimation Of Literacy Rate At Sub-District Level Case Study: Sumenep District Of East Java Province*”. Noviyanti (2014) meneliti “Pendekatan *Small Area Estimation* pada *Scan Statistic* untuk Pendeteksian Kantong Kemiskinan”.

Berdasarkan beberapa penelitian diatas, model yang digunakan adalah model Logit-Normal dan Poisson-Gamma, oleh karena itu penulis tertarik untuk meneliti **Pemodelan Kejadian Poisson Pada *Small Area Estimation* Menggunakan Metode *Hierarchical Bayes* Dengan Fungsi Prior Log-Normal**.

1.2 Rumusan Masalah

Adapun rumusan masalah yang akan dibahas dalam penilitian ini yaitu :

1. Bagaimana langkah-langkah pemodelan kejadian Poisson pada *small area estimation* menggunakan metode *hierarchical bayes* dengan fungsi prior Log-Normal ?
2. Bagaimana penerapan pemodelan kejadian Poisson pada *small area estimation* menggunakan metode *hierarchical bayes* dengan fungsi prior Log-Normal ?

1.3 Batasan Masalah

Penulisan proposal skripsi ini terbatas pada pembahasan mengenai :

1. Data yang digunakan berdistribusi Poisson.
2. Fungsi prior yang digunakan berdistribusi Log-Normal.

1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini yaitu :

1. Untuk memberikan langkah-langkah pemodelan kejadian Poisson pada *small area estimation* menggunakan metode *hierarchical bayes* dengan fungsi prior Log-Normal.
2. Untuk mengaplikasikan teladan penerapan mengenai pemodelan kejadian Poisson pada *small area estimation* menggunakan metode *hierarchical bayes* dengan fungsi prior Log-Normal.

1.5 Manfaat Penelitian

Manfaat yang ingin dicapai dari hasil penelitian ini yaitu dapat memberikan tambahan wawasan mengenai *Small Area Estimation* untuk data cacahan dengan menggunakan metode *Hierarchical Bayes* (*HB*) dan pengaplikasiannya pada fungsi prior Log-Normal ke dalam teladan penerapan.

II. METODE PENELITIAN

2.1 Jenis Penelitian

Penelitian ini merupakan studi literatur yang berupa membandingkan pendugaan parameter secara langsung dengan pendugaan parameter kejadian Poisson pada *small area estimation* menggunakan metode *hierarchical bayes* dengan fungsi prior Log-Normal.

2.2 Waktu

Waktu yang direncanakan dalam penelitian dan penyusunan skripsi ini selama kurang lebih empat bulan.

2.3 Tempat

Penyusunan skripsi ini dikerjakan dan diselesaikan di FMIPA Universitas Bengkulu, sedangkan data yang digunakan dalam penelitian ini diperoleh dengan cara pembangkitan data simulasi pada bahasa pemograman *R-3.2.2*.

2.4 Data Penelitian

Adapun data-data yang diperlukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

a. Data banyaknya sampel pada area kecil ke-i yang dibangkitkan pada program *R-3.2.2*.

b. Data kejadian Poisson pada area kecil ke-i yang dibangkitkan pada program *R-3.2.2*.

2.5 Metode Analisis Data

Penelitian ini dianalisis menggunakan metode *Hierarchical Bayes* (*HB*) dengan langkah sebagai berikut :

1. Membangkitkan data banyaknya sampel dan kejadian Poisson untuk setiap area kecil ke-i pada program *R-3.2.2*.
2. Menentukan parameter rata-rata (θ_i) dengan langkah sebagai berikut :
   a. Menghitung θ_i dengan rumus (2.6) sehingga varian dapat ditentukan.
   b. Menghitung MSE dari varian dan θ_i yang telah didapatkan.
   c. Menghitung RMSE
3. Pendugaan tidak langsung rata-rata (θ_i) dengan metode *Hierarchical Bayes* (*HB*) yaitu prosedur MCMC. Prosedur MCMC tersebut adalah :
   a. Menghitung nilai $\hat{\mu} \sim N\left(\frac{1}{m}\sum_i \xi_i, \frac{\sigma^2}{m}\right)$
   b. Menghitung nilai $\hat{\sigma}^2 \sim G\left(\frac{m}{2} + a, \frac{1}{2}\sum_i(\xi_i - \mu)^2 + b\right)$
   c. Menghitung nilai $\hat{\theta}_i^{HB}$
   d. Menghitung $var(\hat{\theta}_i^{HB})$ dan bias
   e. Menghitung penduga $MSE(\hat{\theta}_i^{HB})$ dan $RMSE(\hat{\theta}_i^{HB})$
4. Menganalisis dan membandingkan nilai $RMSE$ hasil perhitungan parameter rata-rata (θ_i) yang diperoleh pada metode *Hierarchical Bayes* (*HB*) dan pendugaan langsung.

III. *PEMODELAN KEJADIAN POISSON PADA SMALL AREA ESTIMATION MENGGUNAKAN METODE HIERARCHICAL BAYES DENGAN FUNGSI PRIOR LOG-NORMAL DAN LANGKAH-LANGKAH PENDUGAAN PARAMETER*

3.1 Metode *Hierarchical Bayes* dengan Fungsi Prior Log-Normal

Menurut Rao (2003) pendugaan parameter menggunakan metode *Hierarchical Bayes* (*HB*) dengan prior Log-Normal didefinisikan dengan model sebagai berikut :

i. $y_i|\theta_i \sim iid\ Poisson(e_i\theta_i)$

ii. $\xi_i = log(\theta_i)|\mu,\sigma^2 \sim iid\ N(\mu,\sigma^2)$

iii. $f(\mu,\sigma^2) \propto f(\mu)f(\sigma^2)$ (μ dan σ^2 saling bebas) dengan $f(\mu) \propto 1\ ;\ \frac{1}{\sigma^2} \sim G(a,b)\ ; a \geq 0\ , b > 0.$

(4.1)

Model (i) merupakan distribusi sampel variabel y pada data. Parameter θ_i adalah rata-rata yang akan ditaksir pada penelitian ini dengan menggunakan fungsi log pada model (ii). Untuk melakukan penaksiran rata-rata (θ_i) perlu ditaksir terlebih dahulu parameter $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$. Distribusi prior yang tepat untuk $\hat{\sigma}^2$ adalah *Invers Gamma* dengan parameter a dan b yang ditentukan (Maiti, 1998).

Rata-rata pada model *Hierarchical Bayes* akan ditaksir sebagai mean $E(\theta_i|y)$ dengan varian $V(\theta_i|y)$ dari distribusi posterior bersama :

$$f(\theta_i|\mathbf{y}) = \int_{\hat{\mu}} \int_{\hat{\sigma}^2} f(\theta_i,\hat{\mu},\hat{\sigma}^2|\mathbf{y})\ d\hat{\sigma}^2 d\hat{\mu}$$

(4.2)

Sebaran posterior dari bentuk (4.2) memiliki bentuk *opened form*, maka solusi alternatif yang dapat digunakan adalah dengan menghitung besaran posterior melalui integrasi numerik. Menurut Hajarisman (2013), salah satu metode yang dapat digunakan adalah *Marcov Chain Monte Carlo* (MCMC). Tujuan dari MCMC adalah membangun suatu peluang rantai markov hingga pada akhirnya menuju satu sebaran posterior tertentu. Perhitungan sebaran posterior menghasilkan sampel-sampel besaran posterior. Akhirnya, parameter dari sebaran posterior dapat diduga.

Prosedur MCMC yang terkenal adalah Gibbs bersyarat (*Gibbs Conditionals*). Menurut Rao (2003) bentuk Gibbs bersyarat untuk model Log-Normal adalah :

i. $[\hat{\mu}|\theta_i,\sigma^2,y_i] \sim N\left(\frac{1}{m}\Sigma_i\ \xi_i\ , \frac{\sigma^2}{m}\right)$

ii. $[\hat{\sigma}^2|\theta_i,\hat{\mu},y_i] \sim G\left(\frac{m}{2}+a, \frac{1}{2}\Sigma_i(\xi_i-\hat{\mu})^2+b\right)$

iii. $f(\theta_i|\hat{\mu},\hat{\sigma}^2,y_i) \propto \theta_i^{y_i-1} exp\left[-\theta_i - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2}(\xi_i-\hat{\mu})^2\right]$

(4.3)

Pendugaan parameter $\hat{\mu}$ dan σ^2 dibangkitkan secara langsung dari (i) dan (ii) pada (4.3). Sementara itu, bagian (iii) persamaan (4.3) dinyatakan sebagai $f(\theta_i|\hat{\mu},\hat{\sigma}^2,y_i) \propto k(\theta_i)h(\theta_i|\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$ dimana :

i. $h(\theta_i|\hat{\mu},\hat{\sigma}^2) \propto g'(\theta_i)exp\left\{\frac{-(\xi_i-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right\}$

dengan $g'(\theta_i) = \frac{\partial g(\theta_i)}{\partial \theta_i}$ dan

$g(\theta_i) = \log(\theta_i)$

ii. $k(\theta_i) = exp(-e_i\theta_{i_i})\theta_i^{y_i}$

(4.4)

Sesuai dengan persamaan (4.3), $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$ mengikuti distribusi yang standar yaitu *Multivariat Normal* dan *Gamma*. Sehingga nilai kedua parameter tersebut dapat ditaksir melalui pembangkitan sampel acak. Menuru Rao (2003), nilai rata-rata *Hierarchical Bayes* akan diduga melalui algoritma M-H (*gibbs sampling Metropolis-Hasting*), yaitu sebagai berikut :

1. Dibangkitkan $\xi_i \sim iid\ N(\hat{\mu},\hat{\sigma}^2)$ lalu dicari nilai $\theta_i^{(0)} = g^{-1}(\xi_i)$
2. Dihitung nilai $\theta_i^* = \frac{1}{\theta_i^{(0)}} exp\left\{\frac{-(\xi_i-\hat{\mu})^2}{2\hat{\sigma}^2}\right\}$
3. Dihitung probabilitas penerimaan :
   $a\left(\theta_i^{(d)},\theta_i^*\right) = min\left\{ k(\theta_i^*)\big/ k\left(\theta_i^{(d)}\right), 1\right\};$
   $d = 0,1,\ldots,D$
4. Dibangkitkan u dari sebaran Seragam$(0,1)$
5. Dipilih $\theta_i^{(d+1)} = \theta_i^*$ jika $u \leq a\left(\theta_i^{(d)},\theta_i^*\right)$
6. Diulangi langkah 3 sampai 4, sampai diperoleh D sampel.

Setelah dilakukan simulasi M – H, maka diperoleh barisan penduga rata-rata sebagai berikut :

$$\left\{\theta_1^{(d)}, \dots, \theta_m^{(d)}\ ; d = 1, \dots, D\right\} \quad (4.5)$$

Kemudian besaran posterior yang diamati dapat dihitung. Penduga rata-rata *Hierarchical Bayes* ($\hat{\theta}_i^{HB}$) adalah

$$\hat{\theta}_i^{HB} \approx \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{D} \theta_i^{(d)} \quad (4.6)$$

Sedangkan varian penduga rata-rata *Hierarchical Bayes* ($V(\theta_i^{HB}|\hat{\theta})$) adalah

$$V\left(\hat{\theta}_i^{HB}\middle|\hat{\theta}\right) = \frac{1}{D-1}\sum_{d=1}^{D}\left(\theta_i^{(d)} - \hat{\theta}_i^{HB}\right)^2 \quad (4.7)$$

IV. TELADAN PENERAPAN

4.1 Data

Data pada penelitian ini adalah data yang dibangkitkan pada bahasa pemograman *R-3.2.2* dengan $N = 36$. Variabel y pada data penelitian merupakan data yang berdistribusi Poisson yang diperoleh dari banyaknya n sampel pada setiap area ke-i yang masing-masing diperoleh menggunakan algoritma pada 4.2.1 no 1 dan 2.

4.2 Perhitungan Parameter Rata-rata (θ_i)

Nilai parameter rata-rata (θ_i) yang diperoleh dari persamaan (2.6) menggunakan program *Microsoft Excel* 2007 pada data penelitian ini ditunjukkan oleh tabel berikut :

Tabel 4.2. Nilai parameter rata-rata (θ_i)

Area ke-	θ_i	Area ke-	θ_i	Area ke-	θ_i
1	0,900	13	0,924	25	0,932
2	1,331	14	0,959	26	0,548
3	1,234	15	0,928	27	1,302
4	1,525	16	0,702	28	0,899
5	1,258	17	1,076	29	0,373
6	1,039	18	0,876	30	0,935
7	1,484	19	1,273	31	0,971
8	1,093	20	1,062	32	0,751
9	0,915	21	1,273	33	0,388
10	1,093	22	0,911	34	0,702
11	1,438	23	0,932	35	1,011
12	0,726	24	1,107	36	1,120

4.3 Perhitungan Nilai Penduga Rata-Rata *Hierarchical Bayes* $(\hat{\theta}_i^{HB})$

Setelah melakukan perhitungan parameter nilai rata-rata (θ_i), perhitungan nilai rata-rata *Hierarchical Bayes* $(\hat{\theta}_i^{HB})$ dapat dilakukan diawali dengan menghitung nilai μ dan dilanjutkan dengan menghitung nilai σ^2. Hasil perhitungan nilai μ menggunakan bahasa pemrogram *R-3.2.2* adalah -0.05811381. Hasil perhitungan nilai σ^2 menggunakan bahasa pemrogram *R-3.2.2* adalah 0.02064554.

Berdasarkan nilai $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$ yang diperoleh, nilai rata-rata *Hierarchical Bayes* $\left(\hat{\theta}_i^{HB}\right)$ diperoleh dengan menggunakan algoritma M-H dalam bahasa pemrogram *R-3.2.2* ditunjukkan oleh tabel berikut :

Tabel 4.4. Nilai pendugaan rata-rata *Hierarchical Bayes* $\left(\hat{\theta}_i^{HB}\right)$

Area ke-	$\hat{\theta}_i^{HB}$	Area ke-	$\hat{\theta}_i^{HB}$	Area ke-	$\hat{\theta}_i^{HB}$
1	0,724	13	0,999	25	0,869
2	0,760	14	0,990	26	0,600
3	0,989	15	0,982	27	0,949
4	0,925	16	0,815	28	1,130
5	0,957	17	0,695	29	0,726
6	0,994	18	0,930	30	0,892
7	0,962	19	0,847	31	0,804
8	0,962	20	1,169	32	0,687
9	1,000	21	1,005	33	0,433
10	0,982	22	1,034	34	0,642
11	1,094	23	0,890	35	0,908
12	0,803	24	0,796	36	0,818

Tabel 4.6. Statistika deskriptif penduga langsung dan penduga metode *Hierarchical Bayes*

	Minimum	Median	Maksimum	Rata-rata
(θ_i)	0,373	0,965	1,525	0,999
$\left(\hat{\theta}_i^{HB}\right)$	0,251	0,951	1,825	0,894
$RMSE(\theta_i)$	0,264	0,421	0,539	0,423
$RMSE\left(\hat{\theta}_i^{HB}\right)$	0	0,060	0,389	0,102

Pada Tabel 4.6 diperoleh informasi bahwa secara rata-rata penggunaan metode *Hierarchical Bayes* dengan fungsi prior Log-Normal memberikan ketelitian yang lebih baik yaitu dengan nilai $RMSE$ yang lebih kecil dibanding pendugaan langsung.

IV. PENUTUP

4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan mengenai pemodelan kejadian poisson pada *Small Area Estimation* menggunakan metode *Hierarchical Bayes* dengan fungsi prior Log-Normal, diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Langkah-langkah pemodelan kejadian poisson pada *Small Area Estimation* menggunakan metode *Hierarchical Bayes* dengan fungsi prior Log-Normal dimulai dari pendugaan nilai parameter rata-rata secara langsung, kemudian untuk perhitungan pendugaan rata-rata *Hierarchical Bayes* dibantu dengan teknik MCMC, yaitu :

   a. Menentukan nilai $\hat{\mu} \sim N\left(\frac{1}{m}\sum_i \xi_i, \frac{\sigma^2}{m}\right)$

   b. Menentukan nilai $\hat{\sigma}^2 \sim G\left(\frac{m}{2} + a, \frac{1}{2}\sum_i (\xi_i - \hat{\mu})^2 + b\right)$

   c. Setelah menentukan $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}^2$, pendugaan parameter rata-rata *Hierarchical Bayes* $\left(\hat{\theta}_i^{HB}\right)$ dihitung menggunakan algoritma M-H, kemudian menghitung nilai rata-rata posteriornya yaitu : $\hat{\theta}_i^{HB} \approx \frac{1}{D}\sum_{k=1}^{D} \theta_i^{(d)}$.

d. Nilai $RMSE$ digunakan sebagai ukuran keakuratan dan validasi pendugaan rata-rata, dengan menunjukkan nilai $RMSE$ yang mendekati nol (0).

2. Pada penelitian ini diperoleh bahwa pendugaan parameter dengan menggunakan metode *Hierarchical Bayes* lebih baik dibanding dengan pendugaan secara langsung yang ditunjukkan dengan nilai $RMSE$ yang lebih kecil.

4.2 Saran

Penelitian serupa dapat dilanjutkan untuk kasus pemodelan kejadian poisson pada *Small Area Estimation* menggunakan metode *Hierarchical Bayes* menggunakan fungsi prior Log-Normal dengan peubah penyerta atau dengan melakukan pemodelan untuk area unit level.

DAFTAR PUSTAKA

Bain, L. J. and Engelhardt, M., Introduction To Probability And Mathematical Statistics, Duxbury Press, United States of Amirica, 1992

Berger, O.J. 1985. Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Springer, New York.

Datta, G.S, Ghosh, M. 1991. Bayesian Prediction In Linear Models: Application To Small Area Estimation. Ann. Statist. 19, 1746-1770.

Ghosh, M, dan J.K.N. Rao. 1994. *Small Area Estimation: An Appraisal. Statistical Science* 9: 55-93.

Hadi, A. F, dan Nusyirwan. 2008. *Penduga Maksimum Likelihood Untuk Parameter Dispersi Model Poisson-Gamma Dalam Konteks Penduga Area Kecil*. Penelitian ini disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. FMIPA IPB.

Hajarisman, N. 2013. *Pemodelan Area Kecil Untuk Menduga Angka Kematian Bayi Melalui Pendekatan Model Regresi Poisson Bayes Berhirarki Dua-Level*. [Disertasi]. Bogor: Departemen Statistika, FMIPA Institut Pertanian Bogor.

Handayani, D. 2015. *Pendugaan Parameter Pada Suatu Small Area dengan Memperhatikan Masalah Ketergantungan Spasial*. Bogor: IPB.

Hastings. W.K. 1970. *Monte Carlo Sampling Methods Using Marcov Chain And Their Applications*. Biometrika 57. 1317-1340.

Kismiantini. 2007. *Pendekatan Bayes Empirik Pada Pendugaan Statistik Area Kecil Berbasis Model Poisson-Gamma Dengan Peubah Penyerta*. Makalah ini disampaikan pada Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta. [25 Agustus 2007]

Kismiantini. 2008. *Pendugaan Berbasis Model Untuk Kasus Biner Pada Small Area Estimation*. Makalah ini disampaikan pada Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta. [28 November 2008]

Kismiantini. 2010. *Penerapan Metode Bayes Empirik Pada Pendugaan Area Kecil Untuk Kasus Biner*. Makalah ini disampaikan pada Seminar Nasional Penelitian, Pendidikan dan Penerapan MIPA, FMIPA Universitas Negeri Yogyakarta. [15 Mei 2010]

Kurnia, A. 2009. *Prediksi Terbaik Empirik untuk Model Transformasi Logaritma di Dalam Pendugaan Area Kecil dengan Penerapan Pada Data Susenas*. [Disertasi]. Bogor: FMIPA IPB.

Maiti, T. 1998. *Hierarchical Bayes Estimation of Mortality Rates For Disease Mapping*. Journal of statistical Planning and Inference. 69. 339-349.

Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A.H., Teller, E. 1953. *Equation of State Calculations by Fast Computing Machines*. J.Chem. Phys. 21, 1087-1092.

Nadhiroh, I. M. 2008. *Zero Inflated Negative Binomial Models In Small Area Estimation*. Penelitian ini disampaikan pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika. FMIPA IPB.

Notoatmodjo, S. 2005. *Metodologi Penelitian Kesehatan*. Rineka Ilmu. Jakarta

Noviyanti, R.A. 2014. *Pendekatan Small Area Estimation Pada Scan Statistic Untuk Pendeteksian Kantong Kemiskinan*. Penelitian ini disampaikan pada Prosiding Seminar Nasional Matematika, Universitas Jember. [19 November 2014].

Rao, J.N.K. 2003. *Small Area Estimation*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Rumiati, A.T. 2012. *Empirical Bayesian Method For Teh Estimation Of Literacy Rate At Sub-District Level Case Study: Sumenep District Of East Java Province*. IPTEK, *The journal for Technology and Science, Vol 23, Number 1, February 2012*.

Sunandi, E. 2013. *Model Spasial Bayes dalam Pendugaan Area Kecil dengan Peubah Respon Biner*. Kumpulan Makalah Seminar Semirata 2013. FMIPA Lampung, p: 179-183.

Walpole, E. R.1995. *Pengantar Statistika*. Gramedia Pustaka Utama: Jakarta.