



Pendugaan Parameter Populasi

(4 sesi)

Disusun oleh :

Sigit Nugroho
UNIVERSITAS BENGKULU

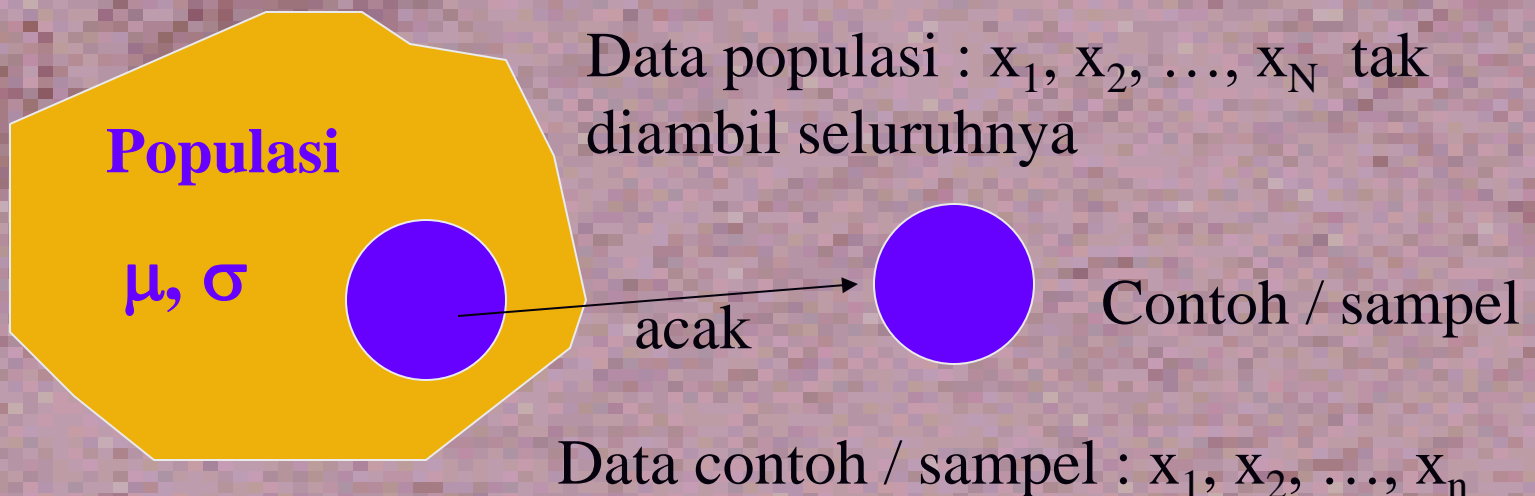


Pendugaan

- ◆ Dalam bagian ini akan dibahas tentang pendugaan titik dan pendugaan interval dari parameter populasi yang tidak diketahui.
- ◆ **Pendugaan Parameter dilakukan karena umumnya kita tidak dapat mengamati seluruh populasi** yang jumlahnya cukup besar, mungkin disebabkan oleh salah satu hal berikut:
 - ketersediaan dana, keterbatasan waktu, sumber daya manusia, alat, bahan dan lain sebagainya.
- ◆ Dengan tidak dapat mendata **seluruh** populasi, sudah barang tentu kita tidak dapat memperoleh nilai parameter populasi yang **sesungguhnya**.

Pendugaan

- ◆ Cara yang dapat ditempuh untuk itu adalah dengan pengambilan contoh acak dari populasi atau penyuplikan acak dari populasi. Data yang didapatkan dari penyuplikan ini dihitung dan kemudian statistik tersebut digunakan sebagai penduga parameter populasi.



Penduga Tak Bias

(Unbiased Estimator)

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

- ◆ Persyaratan yang diperlukan sebagai penduga yang baik adalah penduga tersebut tidak bias.
- ◆ Penduga dikatakan tidak bias apabila nilai **harapan** (nilai ekspektasi) dari **penduga** tersebut akan sama dengan nilai **parameter** yang diduga.
 - Dalam bahasa umum, bila dilakukan pengambilan contoh dengan metode yang sama, dari seluruh kemungkinan contoh, secara rata-rata dalam jangka panjang akan diperoleh nilai yang sebenarnya.



Pendugaan Titik dan Interval

- ◆ **Pendugaan Titik** (*point estimation*) merupakan pendugaan terhadap parameter populasi yang nilainya hanya terdiri dari satu titik nilai.
- ◆ **Pendugaan Interval** (*interval estimation*) merupakan pendugaan terhadap parameter populasi yang nilainya diantara dua angka (jadi merupakan selang atau interval; terdiri dari garis yang menghubungkan dua angka)

Taraf Kepercayaan dan Taraf Nyata

- ◆ *Taraf Kepercayaan* merupakan derajat jaminan bahwa pernyataan secara statistik tertentu adalah benar dibawah kondisi yang telah disebutkan.
- ◆ *Taraf Nyata* merupakan derajat ketidak menentuan tentang pernyataan secara statistik pada kondisi yang sama untuk menentukan taraf kepercayaan

Taraf nyata dilambangkan dengan α ($0 \leq \alpha \leq 1$) dan taraf kepercayaan dilambangkan dengan $1 - \alpha$. Dan secara matematik juga dinyatakan bahwa taraf kepercayaan + taraf nyata = 1.



Penduga Titik bagi μ dan σ^2

Mu topi atau penduga bagi rata-rata populasi adalah rata-rata contoh

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Sigma kuadrat topi atau penduga bagi ragam populasi adalah ragam contoh

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}{n} \right)$$



Penduga Interval bagi σ^2

- ◆ Penduga Interval atau Selang Kepercayaan dua arah $100(1-\alpha)\%$ bagi σ^2 adalah

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2;n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2}$$



Teladan Soal Penduga Interval bagi σ

Sebuah pabrik baterai mengambil **9** buah sampel untuk diukur daya tahan baterai tersebut. Setelah diteliti, ternyata rata-rata daya tahan baterai tersebut adalah **20** jam dengan simpangan baku **3** jam. Pada kisaran berapa perusahaan tersebut akan menaksir simpangan baku (dalam jam) kemampuan populasi baterai produknya tersebut ? Gunakan Selang Kepercayaan **99%**. Asumsi bahwa umur baterai menyebar normal.

Teladan Soal Penduga Interval bagi σ

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\alpha/2;n-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\alpha/2;n-1}^2}$$

$$\frac{(9-1)3^2}{\chi_{0,005;9-1}^2} < \sigma^2 < \frac{(9-1)3^2}{\chi_{0,995;9-1}^2}$$

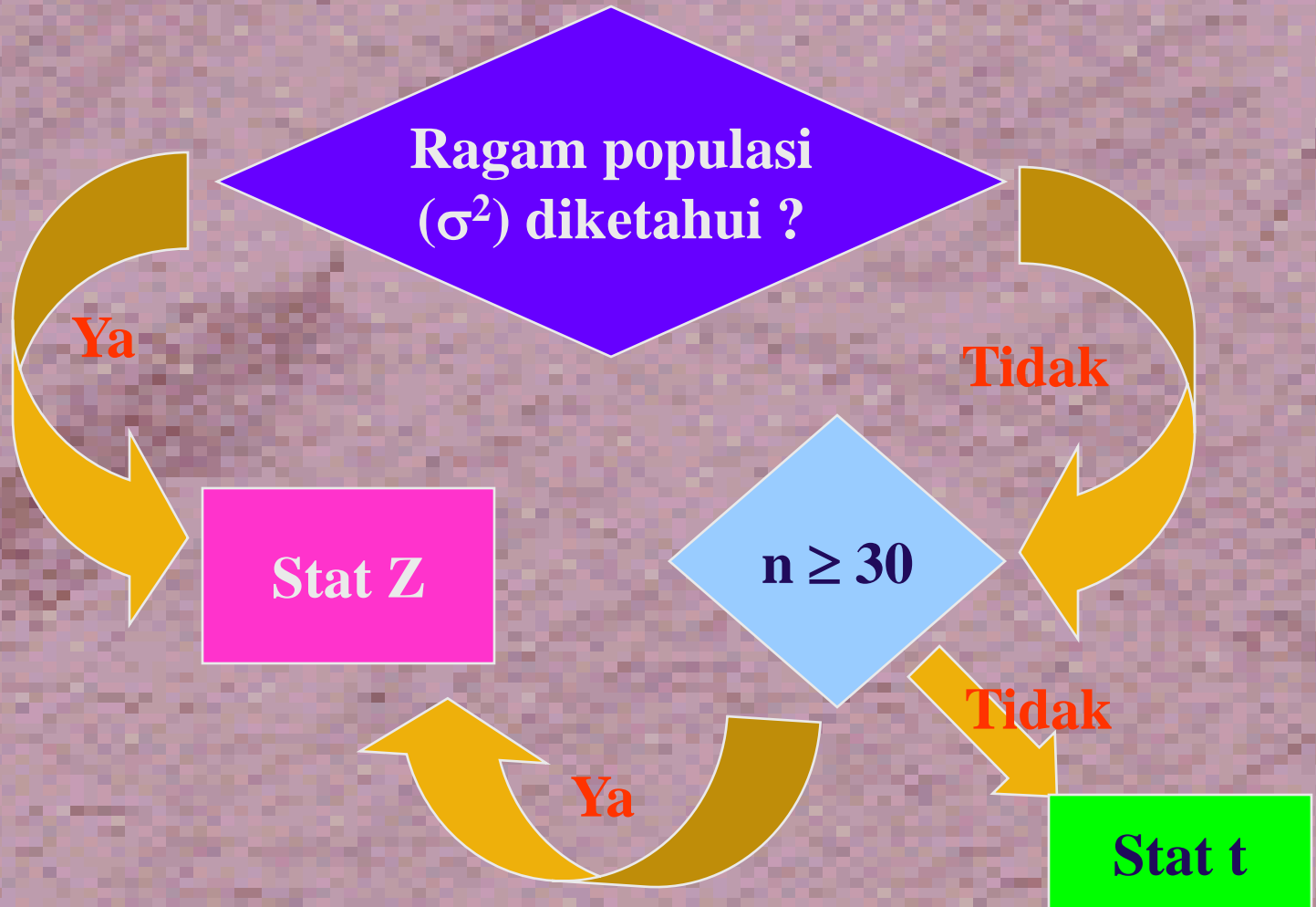
$$\frac{(9-1)3^2}{21,955} < \sigma^2 < \frac{(9-1)3^2}{1,344}$$

$$3,279 < \sigma^2 < 53,571$$

$$1,81 < \sigma < 7,32$$

Pemakaian Statistik Z atau t

dalam pendugaan interval rata-rata populasi





Penduga Interval bagi μ

- ◆ Jika nilai σ^2 diketahui, Penduga Interval atau Selang Kepercayaan dua arah $100(1-\alpha)\%$ bagi μ adalah

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- ◆ Jika nilai σ^2 tak diketahui, tetapi ukuran sampel ($n \geq 30$), Penduga Interval atau Selang Kepercayaan dua arah $100(1-\alpha)\%$ bagi μ adalah

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Teladan Soal

- Menurut sebuah survai dengan contoh berukuran 81 keluarga, diperoleh rata-rata tabungan di sebuah negara sebesar \$77500. Jika populasi tingkat tabungan rumah tangga di negara tersebut berdistribusi normal dengan simpangan baku sebesar \$21700, tentukan Selang Kepercayaan 99% untuk menduga rata-rata tingkat tabungan seluruh keluarga di negara tersebut.

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$77500 - z_{0,9950} \cdot \frac{21700}{\sqrt{81}} < \mu < 77500 + z_{0,9950} \cdot \frac{21700}{\sqrt{81}}$$

Teladan Soal

Dari sebanyak **45** sampel (contoh) yang diambil dari nasabah BritAma di daerah Z, diperoleh keterangan bahwa rata-rata banyaknya transaksi bulanan sebesar **11,25** dan simpangan baku contoh **3,9**. Tentukan Selang Kepercayaan **95%** rata-rata transaksi bulanan di daerah tersebut.

$$\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$11,25 - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{3,9}{\sqrt{45}} < \mu < 11,25 + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{3,9}{\sqrt{45}}$$

Penduga Interval bagi μ

- ◆ Jika nilai σ^2 tak diketahui, dan ukuran sampel ($n < 30$), Penduga Interval atau Selang Kepercayaan dua arah $100(1-\alpha)\%$ bagi μ adalah

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Teladan Soal

- ◆ Dari **15** contoh (sampel) prediksi fund managers tentang *Earning per share* (EPS) suatu saham tahun mendatang, diperoleh rata-rata Rp. **263,-** dan simpangan baku Rp. **72,-** Dengan **Selang Kepercayaan 95%**, bagaimana kita dapat menggunakan informasi ini untuk menduga rata-rata proyeksi EPS dari seluruh saham yang digunakan sebagai populasi. Diasumsikan bahwa sebaran EPS adalah normal.

... $n = 15$, rata-rata contoh = 263, simpangan baku contoh = 72, dan $\alpha = 5\% \rightarrow$ Gunakan tabel t.

$$\bar{x} - t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{\frac{\alpha}{2}; n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$
$$263 - 2,145 \cdot \frac{72}{\sqrt{15}} < \mu < 263 + 2,145 \cdot \frac{72}{\sqrt{15}}$$

Penduga Interval bagi Π

(Π adalah proporsi populasi)

- ◆ Penduga Interval atau Selang Kepercayaan dua arah $100(1-\alpha)\%$ bagi Π adalah

$$p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

dimana

$$p = \hat{\pi} = \frac{\text{jumlah yang memenuhi kriteria}}{\text{jumlah contoh}}$$



Teladan Soal Penduga Interval bagi π

Untuk meningkatkan pelayanan, PT KAI melakukan sebuah survai untuk mendapatkan proporsi penumpang KA yang merasa puas dengan pelayanan selama dalam perjalanan. Dari survai sebanyak 1348 orang penumpang kereta api Argo Lawu diperoleh data bahwa 805 orang merasa puas dengan kenyamanan, ketepatan, dan pelayanan menggunakan jasa transportasi tersebut. ($p = 805/1348 = 0,597$). Pada interval berapa PT KAI dapat menduga proporsi penumpang yang merasa puas dengan pelayanan dari semua perjalanan Argo Lawu ? Gunakan SK 95%.

$$p - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \pi < p + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$0,597 - 1,96 \sqrt{\frac{0,597(1-0,597)}{1348}} < \pi < 0,597 + 1,96 \sqrt{\frac{0,597(1-0,597)}{1348}}$$

$$0,571 < \pi < 0,623$$



Penduga Interval bagi $\mu_1 - \mu_2$

- ◆ Penduga Interval 100(1- α)% bagi beda dua rata-rata populasi dengan asumsi bahwa kedua ragam populasi σ_1^2 dan σ_2^2 diketahui

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

- ◆ Penduga Interval 100(1- α)% bagi beda dua rata-rata populasi dengan asumsi bahwa kedua ragam populasi σ_1^2 dan σ_2^2 tak diketahui, tetapi sama $n_1+n_2 < 30$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2; n_1+n_2-2} \sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2} \left(\frac{n_1+n_2}{n_1n_2} \right)}$$

Penduga Interval bagi $\mu_1 - \mu_2$

- ◆ Penduga Interval $100(1-\alpha)\%$ bagi beda dua rata-rata populasi dengan asumsi bahwa kedua ragam populasi σ_1^2 dan σ_2^2 tak diketahui, dan tidak sama $n_1 + n_2 < 30$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2; \nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

dimana

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1 + 1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2 + 1)}} - 2$$

Teladan Soal Penduga Interval bagi $\mu_1 - \mu_2$

Data berikut berupa besarnya kredit yang diambil oleh nasabah BRI di dua BRI Unit yang berbeda.

Besarnya kredit (Rp. Juta)

BRI Unit A	10,3	9,4	11,0	8,7	9,8		
BRI Unit B	9,7	8,2	12,3	9,2	17,5	8,8	12,8

Buat selang kepercayaan 90% bagi selisih rata-rata besarnya kredit yang diambil di kedua BRI Unit. Asumsikan bahwa besarnya kredit mempunyai sebaran yang menghampiri normal dengan ragam yang tidak sama.

Teladan Soal Penduga Interval bagi $\mu_1 - \mu_2$

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm t_{\alpha/2; \nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

dimana

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1}\right)^2}{(n_1+1)} + \frac{\left(\frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{(n_2+1)}} - 2$$

Besarnya kredit (Rp. Juta)

BRI Unit A	10,3	9,4	11,0	8,7	9,8		
BRI Unit B	9,7	8,2	12,3	9,2	17,5	8,8	12,8

Langkah-langkah yang harus dilakukan

1. Mendapatkan nilai statistik untuk tiap contoh populasi (BRI Unit A dan BRI Unit B): ukuran contoh, rata-rata dan simpangan baku
2. Memasukkan ke dalam rumus dan menghitungnya

Teladan Soal Penduga Interval bagi $\mu_1 - \mu_2$

Suatu ujian akuntansi diberikan pada 50 siswa perempuan dan 75 siswa laki-laki. Siswa-siswa perempuan mencapai rata-rata 76, sedangkan siswa-siswa laki-laki memperoleh rata-rata 82. Diperoleh keterangan bahwa simpangan baku nilai siswa laki-laki 6, sedangkan simpangan baku nilai siswa perempuan 8. Tentukan selang kepercayaan 96% bagi beda rata-rata ujian akuntansi siswa laki-laki dan perempuan yang mungkin mengambil ujian ini.

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

Gunakan ragam contoh sebagai Penduga (pengganti) ragam populasi

$$(82 - 76) \pm z_{0,9800} \sqrt{\frac{6^2}{75} + \frac{8^2}{50}}$$



Penduga Interval bagi $\mu_1 - \mu_2$

- ◆ Penduga Interval 100(1- α)% bagi beda dua rata-rata populasi yang saling tidak bebas, $n_1 + n_2 \leq 30$

$$\bar{d} \pm t_{\alpha/2; n-1} S_{\bar{d}}$$

- ◆ Penduga Interval 100(1- α)% bagi beda dua rata-rata populasi yang saling tidak bebas, $n_1 + n_2 > 30$

$$\bar{d} \pm z_{1-\alpha/2} S_{\bar{d}}$$

Teladan Soal

Dinyatakan bahwa suatu diet baru dapat mengurangi bobot badan seseorang secara rata-rata 4,5 kilogram dalam dua minggu. Berikut ini dicantumkan bobot badan wanita sebelum dan sesudah mengikuti program diet selama 2 minggu tersebut.

Bobot	Wanita						
	1	2	3	4	5	6	7
Sebelum	58,4	60,3	61,7	69,2	64,0	62,6	56,7
Sesudah	60,0	54,8	58,1	62,1	58,5	59,9	54,4

Carilah selang kepercayaan 95% bagi rata-rata pengurangan berat badan yang sesungguhnya, bila sebaran bobot badan itu menghampiri sebaran normal.



Teladan Soal Penduga Interval bagi μ_D

◆ Langkah-langkah pengerjaan

- Carilah nilai d_i yang besarnya sama dengan selisih bobot sesudah dengan sebelum diet, untuk seluruh contoh
- Dengan data baru ini, lakukan penghitungan nilai statistik contoh (ukuran contoh, rata-rata contoh, dan simpangan baku contoh)
- Perlakukan sama seperti pendugaan interval bagi rata-rata populasi bilamana ukuran sampel kecil (<30)



Penduga Interval bagi $\pi_1 - \pi_2$

- ◆ Penduga Interval $100(1-\alpha)\%$ bagi beda dua proporsi populasi $n_1 + n_2 > 30$

$$(p_1 - p_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

p adalah proporsi gabungan kedua contoh populasi

Teladan Soal Penduga Interval bagi $\pi_1 - \pi_2$

Suatu jajak pendapat dilakukan terhadap penduduk kota dan sekitar kota untuk menyelidiki kemungkinan diajukannya rencana pembangunan Mall. Bila 2400 dari 5000 penduduk kota dan 1200 dari 2000 penduduk sekitar kota yang diwawancarai setuju akan rencana tersebut, buat selang kepercayaan 90% bagi selisih proporsi sebenarnya yang menyetujui rencana tersebut.

$$(p_1 - p_2) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{p(1-p) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

$$\left(\frac{2400}{5000} - \frac{1200}{2000} \right) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{3600}{7000} \left(1 - \frac{3600}{7000} \right) \left(\frac{1}{5000} + \frac{1}{2000} \right)}$$